

Числа, відсотки, пропорції

Довідник для підготовки до НМТ з математики

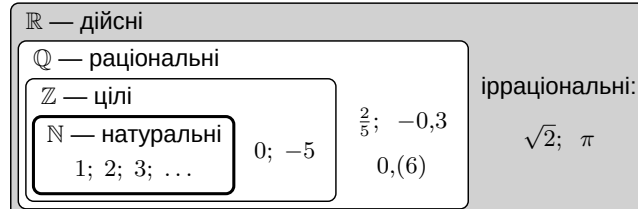


Д — формула є в довідкових матеріалах, які можна відкрити під час НМТ. Формули без значка треба пам'ятати.
Позначення: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ — множини натуральних, цілих, раціональних і дійсних чисел; НСД і НСК — найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне; $\in$ — «належить»; $\subset$ — «є підмножиною».

1. Числа й подільність

5–6, 8 кл.

Числові множини



$\mathbb{Z}$ — натуральні числа, протилежні їм і 0. $\mathbb{Q}$ — числа виду $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$: скінченні або нескінченні періодичні десяткові дроби. Ірраціональні числа — нескінченні неперіодичні десяткові дроби. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Властивості дій: $a + b = b + a$; $ab = ba$;
 $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(ab)c = a(bc)$;
 $a(b + c) = ab + ac$. На нуль ділити не можна.

Ділення з остачею

$a = bq + r$, $0 \leq r < b$
 a — ділене, b — дільник, q — неповна частка, r — остача (a і b — натуральні числа): $189 = 13 \cdot 14 + 7$.
Якщо $r = 0$, то a ділиться націло на b : a — кратне числа b , b — дільник числа a .
Остача від ділення на 10 дорівнює останній цифрі числа.

Ознаки подільності

Натуральне число ділиться націло тоді й тільки тоді, коли:

на 2	остання цифра парна: 0, 2, 4, 6 або 8
на 5	остання цифра 0 або 5
на 10	остання цифра 0
на 3	сума цифр ділиться на 3
на 9	сума цифр ділиться на 9

7335: сума цифр 18 — ділиться на 3 і на 9; остання цифра 5 — ділиться на 5, але не на 2 і не на 10.

Прості й складені числа

Просте число має тільки два натуральних дільники: 1 і саме це число
(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...); складене — більше ніж два; 1 — ні просте, ні складене.
Складене число можна розкласти на прості множники (праворуч):
 $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$.
Таблиця квадратів чисел 10–49 є в довідці НМТ Д; з нею легше розкладати: $1225 = 35^2 = 5^2 \cdot 7^2$.

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

НСД і НСК

НСД(a ; b) — найбільше натуральне число, на яке ділиться націло кожне з чисел a і b ; НСК(a ; b) — найменше натуральне число, яке ділиться націло на кожне з них. За розкладами на прості множники: НСД — добуток спільних простих множників, кожного з найменшим показником степеня; НСК — добуток усіх простих множників, що є хоча б в одному розкладі, кожного з найбільшим показником. Наприклад, $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, тому НСД = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$, НСК = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$. Взаємно прості числа: НСД(a ; b) = 1, тоді НСК(a ; b) = ab . Якщо a — дільник b , то НСД = a , НСК = b . Для трьох і більше чисел — так само: НСК(18; 24; 30) = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$.

2. Звичайні й десяткові дроби

5–6 кл.

Звичайні дроби

$\frac{a}{b}$: a — чисельник, b — знаменник; $a : b = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0$).
Правильний дріб: $a < b$; неправильний: $a \geq b$;

мішане число $3\frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{17}{5}$.

$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$ ($n \neq 0$) — основна властивість дроби

Скоротивши дріб на НСД чисельника й знаменника, отримуємо нескоротний: $\frac{84}{126} = \frac{2}{3}$; найменший спільний знаменник — НСК знаменників.

$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$ $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

Тут $b, c, d \neq 0$. Мішані числа перед множенням і діленням записують неправильними дробами.
Порівняння: за однакових знаменників більший дріб з більшим чисельником, за однакових чисельників — з меншим знаменником; інакше дроби зводять до спільного знаменника.

Десяткові дроби

Порівнюють порозрядно, за потреби дописавши нулі праворуч: $3,2 = 3,200 > 3,198$.

Множення на 10, 100, ... — кома переноситься праворуч на 1, 2, ... цифри; множення на 0,1; 0,01; ... і ділення на 10, 100, ... — ліворуч:
 $4,23 : 10 = 0,423$.

Добуток: множать, не зважаючи на коми, і відокремлюють комою справа стільки цифр, скільки їх після ком в обох множниках разом: $0,2 \cdot 0,3 = 0,06$.
Частка: у діленому й дільнику переносять коми праворуч на стільки цифр, скільки їх після коми в дільнику: $7,5 : 0,06 = 750 : 6 = 125$.

Звичайний дріб у десятковий і навпаки

Звичайний дріб у десятковий: ділять чисельник на знаменник або зводять дріб до знаменника 10, 100, ...: $\frac{7}{20} = \frac{35}{100} = 0,35$; навпаки, $0,35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$.

Нескоротний дріб $\frac{a}{b}$ дорівнює скінченному десятковому лише тоді, коли розклад знаменника b на прості множники не містить чисел, відрізняються від 2 і 5; інакше — нескінченному періодичному:

$$\frac{5}{11} = 0,4545\dots = 0,(45), \quad \frac{7}{12} = 0,58(3)$$

Періодичний дріб у звичайний:

$$x = 0,(45); 100x - x = 45,(45) - 0,(45) = 45;$$

$$x = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}.$$

$$x = 0,1(6); 100x - 10x = 16,(6) - 1,(6) = 15;$$

$$90x = 15; x = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}.$$

Округлення

Цифри після розряду, до якого округлюють, відкидають (у натуральному числі їх замінюють нулями). Якщо перша з відкинутих цифр від 0 до 4, то останню залишену цифру не змінюють; якщо від 5 до 9 — збільшують на 1.

$$3,85741 \approx 3,86 \text{ (до сотих)}; 8763 \approx 8800 \text{ (до сотень)};$$

$$\frac{2}{3} = 0,(6) \approx 0,67; 16,398 \approx 16,40 \text{ (нуль у кінці не відкидають)}.$$

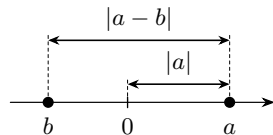
3. Раціональні й дійсні числа

6, 8–9 кл.

Координатна пряма й модуль

Координатна пряма — пряма, на якій вибрано початок відліку, одиничний відрізок і напрям. a і $-a$ — протилежні числа; $-(-a) = a$.

Модуль числа — відстань від початку відліку до точки, яка зображує це число; $|a - b|$ — відстань між точками a і b .



$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases} \quad \text{Д}$$

Властивості (для будь-яких a, b): $|a| \geq 0$; $|-a| = |a|$;

$$|a|^2 = a^2; \sqrt{a^2} = |a|; |ab| = |a| \cdot |b|; \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0);$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

$$\text{Якщо } a > 0: |x| = a \Leftrightarrow x = \pm a; |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a; |x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ або } x > a.$$

$$\text{Наприклад, } |x - 3| < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 5 \text{ (точки, віддалені від 3 менш ніж на 2)}.$$

Порівняння чисел

Із двох чисел більше те, яке на координатній прямій розташоване правіше. Будь-яке додатне число більше за нуль і за будь-яке від'ємне. Із двох від'ємних чисел більше те, модуль якого менший: $-2,5 > -3$. $a > b$, якщо $a - b > 0$. Дійсні числа порівнюють за їхніми десятковими записами: $\sqrt{2} = 1,4142\dots < 1,42$.

Числові проміжки

Нерівність	Проміжок	Зображення
$x > a$	$(a; +\infty)$	
$x < a$	$(-\infty; a)$	
$x \geq a$	$[a; +\infty)$	
$x \leq a$	$(-\infty; a]$	
$a \leq x \leq b$	$[a; b]$	
$a < x < b$	$(a; b)$	
$a < x \leq b$	$(a; b]$	
$a \leq x < b$	$[a; b)$	

Порожня точка (кругла дужка) — кінець не належить проміжку, зафарбована (квадратна дужка) — належить. $(-\infty; +\infty)$ — уся числова пряма.

4. Відношення й пропорції

6 кл.

Відношення, масштаб

Відношення чисел a і b , відрізняються від нуля, — їхня частка $a : b$, або $\frac{a}{b}$; воно показує, у скільки разів a більше за b або яку частину a становить від b .

Відношення не зміниться, якщо його члени помножити або поділити на одне й те саме число,

$$\text{відмінне від нуля: } \frac{2}{3} : \frac{7}{9} = 6 : 7. \text{ Величини беруть в однакових одиницях: } 3,2 \text{ м} : 16 \text{ см} = 320 : 16 = 20.$$

Масштаб — відношення довжини на карті (плані) до відповідної довжини на місцевості. Масштаб $1 : 10\,000\,000$ означає, що 1 см на карті відповідає 10 000 000 см, тобто 100 км, на місцевості.

Пропорція

Пропорція — рівність двох відношень:

$$a : b = c : d, \text{ або } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$$

a і d — крайні члени, b і c — середні. Основна властивість пропорції: добуток крайніх членів дорівнює добутку середніх. І навпаки: якщо a, b, c, d відмінні від нуля і $ad = bc$, то $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (а також $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$). Невідомий член: $9 : x = 3 : 7 \Rightarrow 3x = 9 \cdot 7, x = 21$.

Пряма й обернена пропорційність

Прямо пропорційні величини: якщо одна з них збільшується (зменшується) у кілька разів, то друга — у стільки ж разів; відношення відповідних значень стає: $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ (шлях і час за сталої швидкості).

Обернено пропорційні: якщо одна збільшується (зменшується) у кілька разів, то друга в стільки ж разів зменшується (збільшується); добуток відповідних значень сталий: $x_1 y_1 = x_2 y_2$ (швидкість і час на тому самому шляху).

Приклад: вантаж перевозять 20 машин по 3 т; машин по 5 т треба x : $20 \cdot 3 = 5x, x = 12$.

Не кожна залежність — пропорційність: сторона квадрата втричі більша — площа вдев'ятеро.

Поділ числа в заданому відношенні

Поділити число a у відношенні $m : n$ — подати його сумою двох доданків, відношення яких дорівнює $m : n$. Одна частина — $x = \frac{a}{m+n}$, доданки mx і nx .

Сплав масою 520 кг, маси міді й цинку відносяться як 8 : 5. Одна частина — $520 : 13 = 40$ кг; міді $8 \cdot 40 = 320$ кг, цинку $5 \cdot 40 = 200$ кг. Так само 96 у відношенні 9 : 8 : 7 — це 36, 32 і 28.

5. Відсотки

5–6, 9 кл.

Відсоток. Три основні задачі

$1\% = \frac{1}{100} = 0,01$ частини величини; $p\% = \frac{p}{100}$;
 100% — уся величина.

$23\% = 0,23$; $1,4 = 140\%$; $\frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$.

Нехай a — уся величина (100%), b — її частина, що становить $p\%$:

- $p\%$ від числа a : $b = a \cdot \frac{p}{100}$
- число за його відсотками: $a = b : \frac{p}{100}$
- відсоткове відношення: $p = \frac{b}{a} \cdot 100$

6% від 15 кг — це $15 \cdot 0,06 = 0,9$ кг; якщо 14% маси — це 49 кг, то вся маса — $49 : 0,14 = 350$ кг; 96 дерев з 400 — це $\frac{96}{400} \cdot 100 = 24\%$.

Для дробу так само: $\frac{m}{n}$ від числа a — це $a \cdot \frac{m}{n}$; якщо $\frac{m}{n}$ числа дорівнюють b , то це число — $b : \frac{m}{n}$.
 $\frac{2}{5}$ від 240 — це $240 \cdot \frac{2}{5} = 96$. Усі ці задачі можна розв'язати й пропорцією: $\frac{a}{b} = \frac{100}{p}$.

Збільшення й зменшення на $p\%$

Величина a після збільшення на $p\%$ і після зменшення на $p\%$:

$$a\left(1 + \frac{p}{100}\right) \quad \text{і} \quad a\left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

$+9\%$ — множник $1,09$; -35% — множник $0,65$.

Зміну у відсотках рахують від початкового значення (100%): ціна зросла зі 150 до 240 грн — на $\frac{240 - 150}{150} \cdot 100\% = 60\%$. Удвічі більше — на 100% більше; удвічі менше — на 50% менше.

Кілька змін поспіль — множники перемножують.
Приклад: $+20\%$, потім -20% : $1,2 \cdot 0,8 = 0,96$, тобто на 4% менше, ніж спочатку (a не 0%).

Частка зросла з 20% до 25% — на 5 процентних пунктів, тобто на 25% .

Складні відсотки

Вклад a_0 поклали в банк під $p\%$ річних; щороку відсотки нараховують на всю суму, що є на рахунку. Через n років на рахунку буде

$$a_n = a_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Суми $a_0, a_1, a_2, \dots$ — геометрична прогресія зі знаменником $1 + \frac{p}{100}$.

Приклад: $100\,000$ грн під 10% річних на 2 роки:

$$100\,000 \cdot 1,1^2 = 121\,000 \text{ грн.}$$

Якщо величина n разів поспіль зменшується на $p\%$, то вона стає $a_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$.

Відсотковий вміст

Відсотковий вміст (концентрація) речовини — відсоткове відношення її маси до маси всього розчину (суміші, сплаву):

$$\frac{m_{\text{речовини}}}{m_{\text{розчину}}} \cdot 100\%$$

4 кг солі в 10 кг розчину: $\frac{4}{10} \cdot 100\% = 40\%$.

Коли доливають воду, маса солі не змінюється: у 200 г 10% -го розчину 20 г солі; після додавання 50 г води її вміст $\frac{20}{250} \cdot 100\% = 8\%$.

6. Подання даних

5–6, 9 кл.

Таблиці, діаграми, графіки; середнє

Стовпчаста діаграма: висота

стовпчика — значення величини; зручна, щоб показати зміну з часом.

Кругова діаграма: круг — уся величина, сектори — її частини; кут сектора дорівнює частці, помноженій на 360° .

$$25\% = 0,25 \cdot 360^\circ = 90^\circ$$

Графік показує, як одна величина залежить від іншої (наприклад, температура від часу); значення зчитують за координатами його точок.

Середнє арифметичне кількох чисел — їхня сума, поділена на кількість доданків:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Середня швидкість — весь шлях, поділений на весь час руху.

Мода, медіана, розмах — у довіднику

«Комбінаторика, ймовірність, статистика».

