

# Числа, відсотки, пропорції

Довідник для підготовки до НМТ з математики



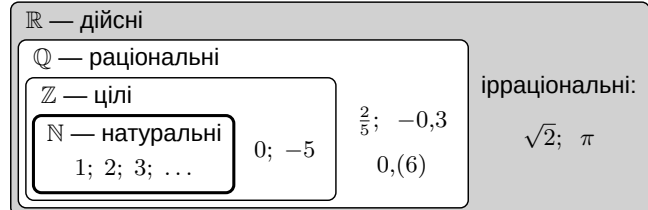
**Д** — формула є в довідкових матеріалах, які можна відкрити під час НМТ. Формули без значка треба пам'ятати.  
Позначення:  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  — множини натуральних, цілих, раціональних і дійсних чисел; НСД і НСК — найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне;  $\in$  — «належить»;  $\subset$  — «є підмножиною».

**Підручник** — клас і пункт підручника А. Г. Мерзляка та ін. (математика: 5 кл. — 2022, 6 кл. — 2023; алгебра: 8 кл. — 2021, 9 кл. — 2017). **НМТ** — номери завдань НМТ 2024–2026 рр.: № 1 — дані; № 2–3, 7, 20 — відсотки, пропорції; № 4, 17 — модуль.

## 1. Числа й подільність

5–6, 8 кл.

### Числові множини



$\mathbb{Z}$  — натуральні числа, протилежні їм 0.  $\mathbb{Q}$  — числа виду  $\frac{m}{n}$ , де  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ : скінченні або нескінченні періодичні десяткові дробі.  
Ірраціональні числа — нескінченні неперіодичні десяткові дробі.  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .  
Властивості дій:  $a + b = b + a$ ;  $ab = ba$ ;  
 $(a + b) + c = a + (b + c)$ ;  $(ab)c = a(bc)$ ;  
 $a(b + c) = ab + ac$ . На нуль ділити не можна.

**Підручник** 6 кл., п. 29; 8 кл., п. 14

### Ділення з остачею

$a = bq + r$ ,  $0 \leq r < b$   
 $a$  — ділене,  $b$  — дільник,  $q$  — неповна частка,  $r$  — остача ( $a$  і  $b$  — натуральні числа):  $189 = 13 \cdot 14 + 7$ .  
Якщо  $r = 0$ , то  $a$  ділиться націло на  $b$ :  $a$  — кратне числа  $b$ ,  $b$  — дільник числа  $a$ .  
Остача від ділення на 10 дорівнює останній цифрі числа.

**Підручник** 5 кл., п. 19; 6 кл., п. 1, 2

### Ознаки подільності

Натуральне число ділиться націло тоді й тільки тоді, коли:

- |       |                                       |
|-------|---------------------------------------|
| на 2  | остання цифра парна: 0, 2, 4, 6 або 8 |
| на 5  | остання цифра 0 або 5                 |
| на 10 | остання цифра 0                       |
| на 3  | сума цифр ділиться на 3               |
| на 9  | сума цифр ділиться на 9               |

7335: сума цифр 18 — ділиться на 3 і на 9; остання цифра 5 — ділиться на 5, але не на 2 і не на 10.

**Підручник** 6 кл., п. 2, 3

## Прості й складені числа

Просте число має тільки два

натуральних дільники: 1 і саме це число  
(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...); складене —  
більше ніж два; 1 — ні просте, ні  
складене.

|     |   |
|-----|---|
| 180 | 2 |
| 90  | 2 |
| 45  | 3 |
| 15  | 3 |
| 5   | 5 |
| 1   |   |

Складене число можна розкласти на  
прості множники (праворуч):

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Таблиця квадратів чисел 10–49 є в довідці НМТ **Д**;  
з нею легше розкладати:  $1225 = 35^2 = 5^2 \cdot 7^2$ .

**Підручник** 6 кл., п. 4

## НСД і НСК

НСД( $a$ ;  $b$ ) — найбільше натуральне число, на яке ділиться націло кожне з чисел  $a$  і  $b$ ; НСК( $a$ ;  $b$ ) — найменше натуральне число, яке ділиться націло на кожне з них. За розкладами на прості множники: НСД — добуток спільних простих множників, кожного з найменшим показником степеня; НСК — добуток усіх простих множників, що є хоча б в одному розкладі, кожного з найбільшим показником. Наприклад,  $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ ,  $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ , тому НСД =  $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ , НСК =  $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$ . Взаємно прості числа: НСД( $a$ ;  $b$ ) = 1, тоді НСК( $a$ ;  $b$ ) =  $ab$ . Якщо  $a$  — дільник  $b$ , то НСД =  $a$ , НСК =  $b$ . Для трьох і більше чисел — так само: НСК(18; 24; 30) =  $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$ .

**Підручник** 6 кл., п. 5, 6

## 2. Звичайні й десяткові дроби

5–6 кл.

### Звичайні дроби

$\frac{a}{b}$ :  $a$  — чисельник,  $b$  — знаменник;  $a : b = \frac{a}{b}$  ( $b \neq 0$ ).

Правильний дріб:  $a < b$ ; неправильний:  $a \geq b$ ;

мішане число  $3\frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{17}{5}$ .

$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$  ( $n \neq 0$ ) — основна властивість дробу

Скоротивши дріб на НСД чисельника й знаменника,

отримуємо нескоротний:  $\frac{84}{126} = \frac{2}{3}$ ; найменший

спільний знаменник — НСК знаменників.

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Тут  $b, c, d \neq 0$ . Мішані числа перед множенням і діленням записують неправильними дробами.

Порівняння: за однакових знаменників більший дріб з більшим чисельником, за однакових чисельників — з меншим знаменником; інакше дроби зводять до спільного знаменника.

**Підручник** 5 кл., п. 25–29; 6 кл., п. 7–11, 13

### Десяткові дроби

Порівнюють порозрядно, за потреби дописавши нулі праворуч:  $3,2 = 3,200 > 3,198$ .

Множення на 10, 100, ... — кома переноситься праворуч на 1, 2, ... цифри; множення на 0,1; 0,01; ... і ділення на 10, 100, ... — ліворуч:

$$4,23 : 10 = 0,423.$$

Добуток: множать, не зважаючи на коми, і відокремлюють комою справа стільки цифр, скільки їх після ком в обох множниках разом:  $0,2 \cdot 0,3 = 0,06$ .

Частка: у діленому й дільнику переносять коми праворуч на стільки цифр, скільки їх після коми в дільнику:  $7,5 : 0,06 = 750 : 6 = 125$ .

**Підручник** 5 кл., п. 30, 31, 33–35

### Звичайний дріб у десятковий і навпаки

Звичайний дріб у десятковий: ділять чисельник на знаменник або зводять дріб до знаменника 10, 100, ...:

$$\dots: \frac{7}{20} = \frac{35}{100} = 0,35; \text{ навпаки, } 0,35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}.$$

Нескоротний дріб  $\frac{a}{b}$  дорівнює скінченному десятковому лише тоді, коли розклад знаменника  $b$  на прості множники не містить чисел, відмінних від 2 і 5; інакше — нескінченному періодичному:

$$\frac{5}{11} = 0,4545\dots = 0,(45), \quad \frac{7}{12} = 0,58(3)$$

Періодичний дріб у звичайний:

$$x = 0,(45); 100x - x = 45,(45) - 0,(45) = 45;$$

$$x = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}.$$

$$x = 0,1(6); 100x - 10x = 16,(6) - 1,(6) = 15;$$

$$90x = 15; x = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}.$$

**Підручник** 6 кл., п. 15, 16; 8 кл., п. 14

### Округлення

Цифри після розряду, до якого округлюють, відкидають (у натуральному числі їх замінюють нулями). Якщо перша з відкинутих цифр від 0 до 4, то останню залишену цифру не змінюють; якщо від 5 до 9 — збільшують на 1.

$$3,85741 \approx 3,86 \text{ (до сотих); } 8763 \approx 8800 \text{ (до сотень);}$$

$$\frac{2}{3} = 0,(6) \approx 0,67; 16,398 \approx 16,40 \text{ (нуль у кінці не відкидають).}$$

**Підручник** 5 кл., п. 32; 6 кл., п. 17

## 3. Раціональні й дійсні числа

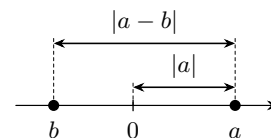
6, 8–9 кл.

### Координатна пряма й модуль

Координатна пряма — пряма, на якій вибрано початок відліку, одиничний відрізок і напрям.  $a$  і  $-a$  — протилежні числа;  $-(-a) = a$ .

Модуль числа — відстань

від початку відліку до точки, яка зображує це число;  $|a - b|$  — відстань між точками  $a$  і  $b$ .



$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases} \quad \text{Д}$$

Властивості (для будь-яких  $a, b$ ):  $|a| \geq 0$ ;  $|-a| = |a|$ ;

$$|a|^2 = a^2; \sqrt{a^2} = |a|; |ab| = |a| \cdot |b|; \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0);$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

$$\text{Якщо } a > 0: |x| = a \Leftrightarrow x = \pm a; \quad |x| < a \Leftrightarrow$$

$$-a < x < a; \quad |x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ або } x > a.$$

Наприклад,  $|x - 3| < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 5$  (точки, віддалені від 3 менш ніж на 2).

**Підручник** 6 кл., п. 28–30; 8 кл., п. 15

**НМТ** № 4, 17

### Порівняння чисел

Із двох чисел більше те, яке на координатній прямій розташоване правіше. Будь-яке додатне число більше за нуль і за будь-яке від'ємне. Із двох від'ємних чисел більше те, модуль якого менший:

$$-2,5 > -3. \quad a > b, \text{ якщо } a - b > 0. \quad \text{Дійсні числа}$$

порівнюють за їхніми десятковими записами:

$$\sqrt{2} = 1,4142\dots < 1,42.$$

**Підручник** 6 кл., п. 31; 8 кл., п. 14

### Числові проміжки

| Нерівність        | Проміжок       | Зображення |
|-------------------|----------------|------------|
| $x > a$           | $(a; +\infty)$ |            |
| $x < a$           | $(-\infty; a)$ |            |
| $x \geq a$        | $[a; +\infty)$ |            |
| $x \leq a$        | $(-\infty; a]$ |            |
| $a \leq x \leq b$ | $[a; b]$       |            |
| $a < x < b$       | $(a; b)$       |            |
| $a < x \leq b$    | $(a; b]$       |            |
| $a \leq x < b$    | $[a; b)$       |            |

Порожня точка (кругла дужка) — кінець не належить проміжку, зафарбована (квадратна дужка) — належить.  $(-\infty; +\infty)$  — уся числова пряма.

**Підручник** 9 кл., п. 5, 6

**НМТ** № 4

## 4. Відношення й пропорції

6 кл.

### Відношення, масштаб

Відношення чисел  $a$  і  $b$ , відмінних від нуля, — їхня частка  $a : b$ , або  $\frac{a}{b}$ ; воно показує, у скільки разів  $a$  більше за  $b$  або яку частину  $a$  становить від  $b$ . Відношення не зміниться, якщо його члени помножити або поділити на одне й те саме число, відмінне від нуля:  $\frac{2}{3} : \frac{7}{9} = 6 : 7$ . Величини беруть в однакових одиницях:  $3,2 \text{ м} : 16 \text{ см} = 320 : 16 = 20$ . Масштаб — відношення довжини на карті (плані) до відповідної довжини на місцевості. Масштаб  $1 : 10\,000\,000$  означає, що 1 см на карті відповідає 10 000 000 см, тобто 100 км, на місцевості.

Підручник 6 кл., п. 18

НМТ № 2–3

### Пропорція

Пропорція — рівність двох відношень:

$$a : b = c : d, \text{ або } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$$

$a$  і  $d$  — крайні члени,  $b$  і  $c$  — середні. Основна властивість пропорції: добуток крайніх членів дорівнює добутку середніх. І навпаки: якщо  $a, b, c, d$  відмінні від нуля і  $ad = bc$ , то  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  (а також  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ ). Невідомий член:  $9 : x = 3 : 7 \Rightarrow 3x = 9 \cdot 7, x = 21$ .

Підручник 6 кл., п. 19

НМТ № 2–3

### Пряма й обернена пропорційність

Прямо пропорційні величини: якщо одна з них збільшується (зменшується) у кілька разів, то друга — у стільки ж разів; відношення відповідних значень стає:  $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$  (шлях і час за сталої швидкості).

Обернено пропорційні: якщо одна збільшується (зменшується) у кілька разів, то друга в стільки ж разів зменшується (збільшується); добуток відповідних значень сталий:  $x_1 y_1 = x_2 y_2$  (швидкість і час на тому самому шляху).

Приклад: вантаж перевозять 20 машин по 3 т; машин по 5 т треба  $x$ :  $20 \cdot 3 = 5x, x = 12$ .

Не кожна залежність — пропорційність: сторона квадрата втричі більша — площа вдев'ятеро.

Підручник 6 кл., п. 21

НМТ № 2–3

### Поділ числа в заданому відношенні

Поділити число  $a$  у відношенні  $m : n$  — подати його сумою двох доданків, відношення яких дорівнює  $m : n$ . Одна частина —  $x = \frac{a}{m+n}$ , доданки  $mx$  і  $nx$ .

Сплав масою 520 кг, маси міді й цинку відносяться як 8 : 5. Одна частина —  $520 : 13 = 40$  кг; міді  $8 \cdot 40 = 320$  кг, цинку  $5 \cdot 40 = 200$  кг. Так само 96 у відношенні 9 : 8 : 7 — це 36, 32 і 28.

Підручник 6 кл., п. 22

НМТ № 2–3

## 5. Відсотки

5–6, 9 кл.

### Відсоток. Три основні задачі

$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ частини величини}; p\% = \frac{p}{100};$$
$$100\% \text{ — уся величина.}$$

$$23\% = 0,23; 1,4 = 140\%; \frac{3}{4} = 0,75 = 75\%.$$

Нехай  $a$  — уся величина (100%),  $b$  — її частина, що становить  $p\%$ :

$$\bullet p\% \text{ від числа } a: b = a \cdot \frac{p}{100}$$

$$\bullet \text{число за його відсотками: } a = b : \frac{p}{100}$$

$$\bullet \text{відсоткове відношення: } p = \frac{b}{a} \cdot 100$$

6% від 15 кг — це  $15 \cdot 0,06 = 0,9$  кг; якщо 14% маси — це 49 кг, то вся маса —  $49 : 0,14 = 350$  кг; 96 дерев з 400 — це  $\frac{96}{400} \cdot 100 = 24\%$ .

Для дробу так само:  $\frac{m}{n}$  від числа  $a$  — це  $a \cdot \frac{m}{n}$ ; якщо  $\frac{m}{n}$  числа дорівнюють  $b$ , то це число —  $b : \frac{m}{n}$ .  $\frac{2}{5}$  від 240 — це  $240 \cdot \frac{2}{5} = 96$ . Усі ці задачі можна розв'язати й пропорцією:  $\frac{a}{b} = \frac{100}{p}$ .

Підручник 5 кл., п. 37, 38; 6 кл., п. 12, 14, 19, 20

НМТ № 2–3, 7, 20

### Збільшення й зменшення на $p\%$

Величина  $a$  після збільшення на  $p\%$  і після зменшення на  $p\%$ :

$$a \left(1 + \frac{p}{100}\right) \quad \text{і} \quad a \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

+9% — множник 1,09; –35% — множник 0,65.

Зміну у відсотках рахують від початкового значення (100%): ціна зросла зі 150 до 240 грн — на  $\frac{240 - 150}{150} \cdot 100\% = 60\%$ . Удвічі більше — на 100%

більше; удвічі менше — на 50% менше.

Кілька змін поспіль — множники перемножують.

Приклад: +20%, потім –20%:  $1,2 \cdot 0,8 = 0,96$ , тобто на 4% менше, ніж спочатку (а не 0%).

Частка зросла з 20% до 25% — на 5 процентних пунктів, тобто на 25%.

Підручник 5 кл., п. 37; 6 кл., п. 20; 9 кл., п. 18

НМТ № 2–3, 7, 20

### Складні відсотки

Вклад  $a_0$  поклали в банк під  $p\%$  річних; щороку відсотки нараховують на всю суму, що є на рахунок. Через  $n$  років на рахунок буде

$$a_n = a_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Суми  $a_0, a_1, a_2, \dots$  — геометрична прогресія зі знаменником  $1 + \frac{p}{100}$ .

Приклад: 100 000 грн під 10% річних на 2 роки:  $100\,000 \cdot 1,1^2 = 121\,000$  грн.

Якщо величина  $n$  разів поспіль зменшується на  $p\%$ , то вона стає  $a_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$ .

Підручник 9 кл., п. 18

НМТ № 7, 20

### Відсотковий вміст

Відсотковий вміст (концентрація) речовини — відсоткове відношення її маси до маси всього розчину (суміші, сплаву):

$$\frac{m_{\text{речовини}}}{m_{\text{розчину}}} \cdot 100 \%$$

4 кг солі в 10 кг розчину:  $\frac{4}{10} \cdot 100 \% = 40 \%$ .

Коли доливають воду, маса солі не змінюється: у 200 г 10 %-го розчину 20 г солі; після додавання 50 г води її вміст  $\frac{20}{250} \cdot 100 \% = 8 \%$ .

**Підручник** 6 кл., п. 20

**НМТ** № 7, 20

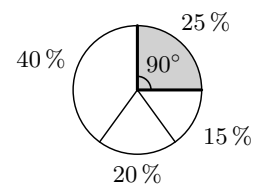
## 6. Подання даних

5–6, 9 кл.

### Таблиці, діаграми, графіки; середнє

Стовпчаста діаграма: висота стовпчика — значення величини; зручна, щоб показати зміну з часом.

Кругова діаграма: круг — уся величина, сектори — її частини; кут сектора дорівнює частці, помноженій на  $360^\circ$ .



$$25 \% \rightarrow 0,25 \cdot 360^\circ = 90^\circ$$

Графік показує, як одна величина залежить від іншої (наприклад, температура від часу); значення зчитують за координатами його точок.

Середнє арифметичне кількох чисел — їхня сума, поділена на кількість доданків:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Середня швидкість — весь шлях, поділений на весь час руху.

Мода, медіана, розмах — у довіднику

«Комбінаторика, ймовірність, статистика».

**Підручник** 5 кл., п. 36; 6 кл., п. 26, 44; 9 кл., п. 24

**НМТ** № 1