

Функції та графіки

Довідник для підготовки до НМТ з математики



Д — формула є в довідкових матеріалах, які можна відкрити під час НМТ. Формули без значка треба пам'ятати.
Позначення (як у підручнику): $D(f)$ і $E(f)$ — область визначення й область значень функції f (пишуть і $D(y)$, $E(y)$); $\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел; (a_n) — послідовність з членами $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

1. Функція та її властивості

7, 9, 10 кл.

Функція, $D(f)$ і $E(f)$

Функція $y = f(x)$ — правило, за яким кожному x з множини $D(f)$ відповідає єдине значення y .

$D(f)$ — область визначення (усі x), $E(f)$ — область значень (усі значення y); це проекції графіка на осі.

Способи задання: описом, формулою, таблицею, графіком.

Якщо $D(f)$ не вказано, то це всі x , при яких формула має зміст: знаменник $\neq 0$; вираз під квадратним коренем ≥ 0 , а якщо корінь у знаменнику, то > 0 . Приклад: $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}$,

$D(y) = [-2; 3) \cup (3; +\infty)$.

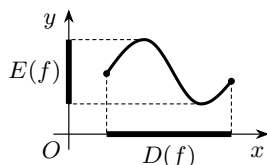
$E(f)$ часто знаходять за допомогою оцінок $x^2 \geq 0$, $|x| \geq 0$, $\sqrt{x} \geq 0$: для $y = x^2 + 3$ маємо

$E(y) = [3; +\infty)$, для $y = 5 - |x|$ — $E(y) = (-\infty; 5]$.

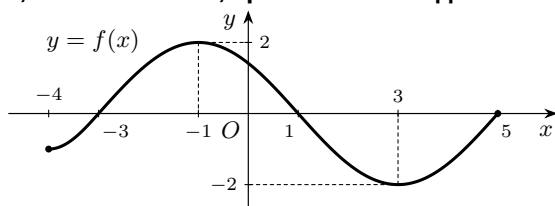
Точка $(x_0; y_0)$ лежить на графіку $\Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$.

Перетин з віссю y — точка $(0; f(0))$ (якщо $0 \in D(f)$), з віссю x — точки $(x_0; 0)$, де $f(x_0) = 0$.

Вертикальна пряма перетинає графік функції не більше ніж в одній точці.



Нулі, знакосталість, зростання і спадання



На рисунку: $D(f) = [-4; 5]$, $E(f) = [-2; 2]$.

Нулі — значення x , при яких $f(x) = 0$ (абсциси спільних точок графіка з віссю x); тут $-3, 1, 5$.

Проміжки знакосталості: $f(x) > 0$ — графік над віссю x (тут на $(-3; 1)$), $f(x) < 0$ — під нею (на $[-4; -3)$ і $(1; 5)$).

Зростає на проміжку: для будь-яких його $x_1 < x_2$ маємо $f(x_1) < f(x_2)$; спадає: $f(x_1) > f(x_2)$. Тут зростає на $[-4; -1]$ і $[3; 5]$, спадає на $[-1; 3]$. Функцію, що зростає (спадає) на всій $D(f)$, називають зростаючою (спадною).

Проміжки вказують найбільшої довжини. Функція $y = \frac{1}{x}$ спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$, але не на їх об'єднанні.

Найбільше й найменше значення

Найбільше значення на множині M :

$\max_M f(x) = f(x_0)$, якщо $x_0 \in M$ і $f(x) \leq f(x_0)$ для всіх $x \in M$; найменше $\min_M f(x)$ — аналогічно. Для функції з попередньої картки $\max f(x) = f(-1) = 2$, $\min f(x) = f(3) = -2$.

Якщо f зростає на $[a; b]$, то $\min_{[a; b]} f(x) = f(a)$, $\max_{[a; b]} f(x) = f(b)$; якщо спадає — навпаки.

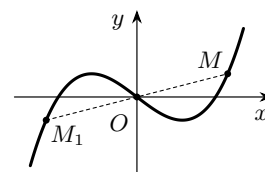
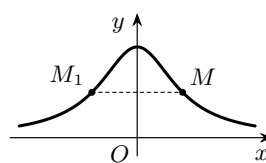
Не кожна функція їх має: $y = x^2$ не має найбільшого значення.

Парні й непарні функції

$D(f)$ симетрична відносно нуля (з $x \in D(f)$ впливає $-x \in D(f)$) і для всіх $x \in D(f)$:

парна — $f(-x) = f(x)$; графік симетричний відносно осі y ;

непарна — $f(-x) = -f(x)$; графік симетричний відносно початку координат.



парна: $M(a; b)$ і $M_1(-a; b)$ непарна: $M(a; b)$ і $M_1(-a; -b)$

Парні: $y = x^2$, $y = |x|$, $y = c$. Непарні: $y = kx$, $y = \frac{k}{x}$, $y = x^3$. $y = 0$ — і парна, і непарна; $y = x + 1$ і $y = \sqrt{x}$ — ні парні, ні непарні.

Як дослідити: 1) чи симетрична $D(f)$ (якщо ні — функція ні парна, ні непарна); 2) порівняти $f(-x)$ з $f(x)$ і з $-f(x)$. Приклад: $f(x) = x^3 - x$, $f(-x) = -x^3 + x = -f(x)$ — непарна.

Якщо непарна функція визначена в точці 0, то $f(0) = 0$.

Обернена функція

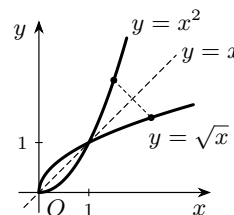
Функція оборотна, якщо кожного свого значення вона набуває лише в одній точці: для кожного $y_0 \in E(f)$ існує єдине $x_0 \in D(f)$ таке, що $f(x_0) = y_0$. Зростаюча (спадна) функція — оборотна.

Функції f і g взаємно обернені, якщо $D(g) = E(f)$, $E(g) = D(f)$ і з $f(x_0) = y_0$ випливає $g(y_0) = x_0$.

Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$ (на рисунку $y = x^2$, $x \geq 0$, і $y = \sqrt{x}$).

Обернена до зростаючої функції — зростаюча, до спадної — спадна.

Як знайти: з $y = f(x)$ виразити x через y і поміняти позначення: $y = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{2} \Rightarrow y = \frac{x+1}{2}$.



2. Основні функції та їхні графіки

7–8 кл.

Лінійна функція $y = kx + b$

$D(y) = \mathbb{R}$; графік — пряма.

$k = \tan \alpha$ — кутовий коефіцієнт (α — кут між прямою і додатним напрямом осі x).

$k > 0$ — функція зростає,

$k < 0$ — спадає, $k = 0$ —

стала: $y = b$.

$E(y) = \mathbb{R}$ при $k \neq 0$; при $k = 0$ — одне число b

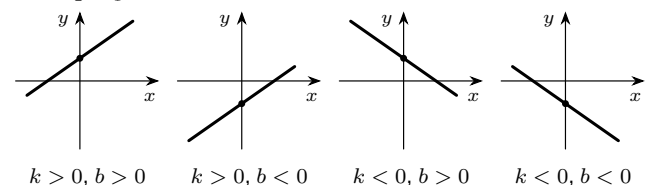
(пряма $y = b$ перпендикулярна до осі y). Перетин з віссю y — точка $(0; b)$, з віссю x (при $k \neq 0$) — точка $(-\frac{b}{k}; 0)$.

Пряма пропорційність $y = kx$, $k \neq 0$: графік проходить через початок координат.

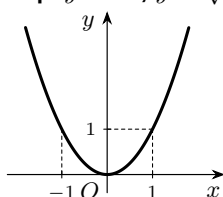
Прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ паралельні $\Leftrightarrow k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$; при $k_1 \neq k_2$ — перетинаються.

Пряма через точки $(x_1; y_1)$ і $(x_2; y_2)$, $x_1 \neq x_2$:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad b = y_1 - kx_1.$$

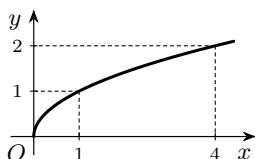


Функції $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = |x|$, $y = x^3$



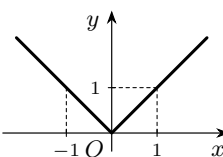
$y = x^2$ — парабола.

$D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = [0; +\infty)$; парна; спадає на $(-\infty; 0]$, зростає на $[0; +\infty)$.



$y = \sqrt{x}$ — вітка параболі.

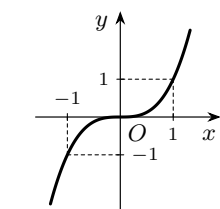
$D(y) = E(y) = [0; +\infty)$; зростає; ні парна, ні непарна.



$y = |x|$: $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = [0; +\infty)$; парна; спадає на $(-\infty; 0]$, зростає на $[0; +\infty)$.

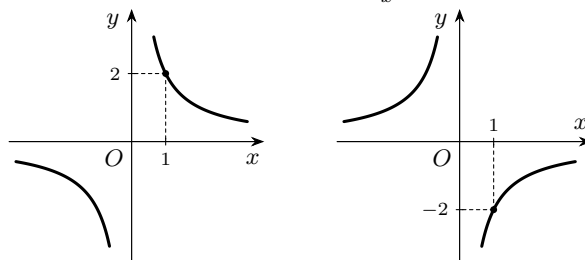
$|x| = x$, якщо $x \geq 0$; $|x| = -x$, якщо $x < 0$ [Д]

Степеневу, показникову й логарифмічну функції — у довіднику «Степені, корені, логарифми», тригонометричні функції й періодичність — у довіднику «Тригонометрія».



$y = x^3$: $D(y) = E(y) = \mathbb{R}$; непарна; зростає.

Обернена пропорційність $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$



$k > 0$: вітки в I і III чвертях $k < 0$: вітки в II і IV чвертях

Графік — гіпербола. $D(y)$ і $E(y)$ — усі числа, крім 0; нулів немає; функція непарна.

$k > 0$: спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$; $k < 0$: зростає на кожному з них.

Осі координат — асимптоти: вітки необмежено наближаються до осей, але не перетинають їх.

Для будь-якої точки $(x_0; y_0)$ гіперболи $k = x_0y_0$: на рисунках $k = 1 \cdot 2 = 2$ і $k = 1 \cdot (-2) = -2$.

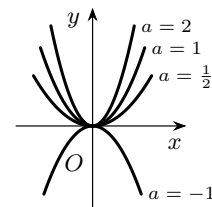
3. Квадратична функція

8–9 кл.

Парабола $y = ax^2$, $a \neq 0$

Вершина — $O(0; 0)$, вісь симетрії — вісь y . Вітки направлені вгору при $a > 0$ і вниз при $a < 0$.

Що більше $|a|$, то «вужча» парабола: графік $y = ax^2$ отримують з параболі $y = x^2$ перетворенням $y = kf(x)$ при $k = a$ (розділ 4).



Парабола $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Графік — парабола, що

дорівнює параболі

$y = ax^2$: вітки вгору при $a > 0$, униз при $a < 0$.

Вершина $(x_0; y_0)$:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = f(x_0)$$

Вісь симетрії — пряма $x = x_0$; перетин з віссю

y — точка $(0; c)$.

Нулі — корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$;

$D = b^2 - 4ac$ [Д]:

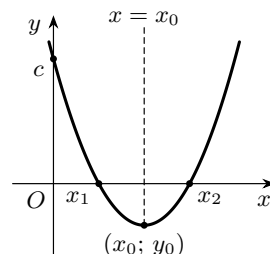
$$D > 0: x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad \text{[Д]};$$

$$D = 0: x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \quad \text{[Д]}; \quad D < 0: \text{нулів немає.}$$

При $D > 0$ вершина посередині між нулями:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Вигляд $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ одразу показує вершину: це парабола $y = ax^2$, у якої вершину O перенесено в точку $(x_0; y_0)$.



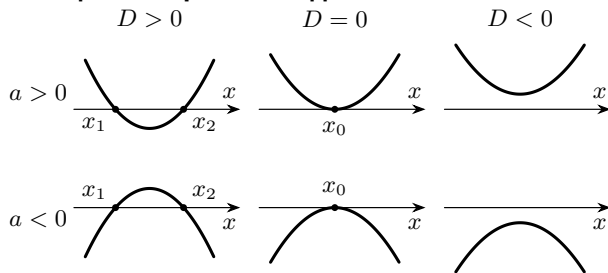
Властивості квадратичної функції

	$a > 0$	$a < 0$
$E(y)$	$[y_0; +\infty)$	$(-\infty; y_0]$
спадає на	$(-\infty; x_0]$	$[x_0; +\infty)$
зростає на	$[x_0; +\infty)$	$(-\infty; x_0]$
y_0 —	найменше значення	найбільше значення

На відрізку найбільше й найменше значення — серед значень у його кінцях і у вершині (якщо x_0 належить відрізку).

Знаки коефіцієнтів за графіком: a — за напрямом віток; c — за точкою $(0; c)$; якщо вершина ліворуч від осі y , то a і b одного знака, праворуч — різних ($b = 0$, якщо вершина на осі y).

Розміщення параболи відносно осі x



x_1, x_2 — нулі функції, x_0 — абсциса вершини. За схемою розв'язують квадратні нерівності: $ax^2 + bx + c > 0$ там, де парабола над віссю x , $ax^2 + bx + c < 0$ — де під нею. Якщо $D < 0$, то $ax^2 + bx + c$ при всіх x має знак числа a .

4. Перетворення графіків

9–10 кл.

Як отримати графік з графіка $y = f(x)$

Точка $(x_0; y_0)$ графіка $y = f(x)$ переходить у точку другого стовпця.

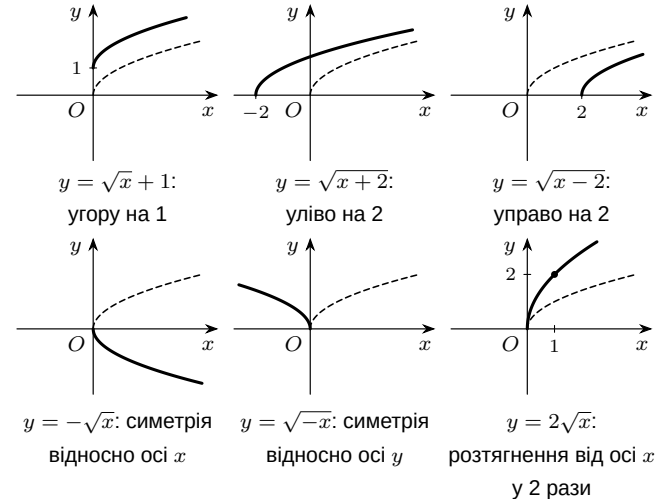
$y = f(x) + b$	$(x_0; y_0 + b)$	уздовж осі y : на b угору ($b > 0$) або на $ b $ униз ($b < 0$)
$y = f(x + a)$	$(x_0 - a; y_0)$	уздовж осі x : на a уліво ($a > 0$) або на $ a $ управо ($a < 0$)
$y = kf(x)$	$(x_0; ky_0)$	розтягнення від осі y у k разів ($k > 1$) або стиснення до осі y у $\frac{1}{k}$ разів ($0 < k < 1$)
$y = f(kx)$	$(\frac{x_0}{k}; y_0)$	стиснення до осі y у k разів ($k > 1$) або розтягнення від осі y у $\frac{1}{k}$ разів ($0 < k < 1$)
$y = -f(x)$	$(x_0; -y_0)$	симетрія відносно осі x
$y = f(-x)$	$(-x_0; y_0)$	симетрія відносно осі y
$y = f(x) $	$(x_0; y_0)$	частину під віссю x відобразити відносно осі x , решту залишити
$y = f(x)$	$(\pm x_0; y_0)$, $x_0 \geq 0$	частину при $x \geq 0$ залишити й відобразити відносно осі y , частину при $x < 0$ відкинути

Зважайте на напрям: $y = f(x - 3)$ — зсув управо на 3; $y = (x + 2)^2$ — парабола $y = x^2$, зсунута вліво на 2. Якщо $k < 0$, додається симетрія: для $y = kf(x)$ — відносно осі x , для $y = f(kx)$ — відносно осі y .

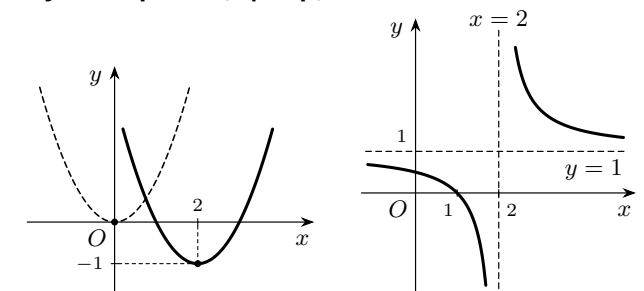
Кілька перетворень виконують по черзі:

$y = 2\sqrt{x+1} - 3$ — зсув угору на 3, зсув уліво на 1, розтягнення від осі x у 2 рази і зсув униз на 3.

Перетворення на прикладі $y = \sqrt{x}$ (штрихова)



Зсуви: вершина, центр, асимптоти



штрихова — $y = x^2$, суцільна — $y = (x - 2)^2 - 1$
 $y = \frac{1}{x-2} + 1$: асимптоти $x = 2$ і $y = 1$

Зсув на m уздовж осі x і на n уздовж осі y переносить «опорну» точку в $(m; n)$:

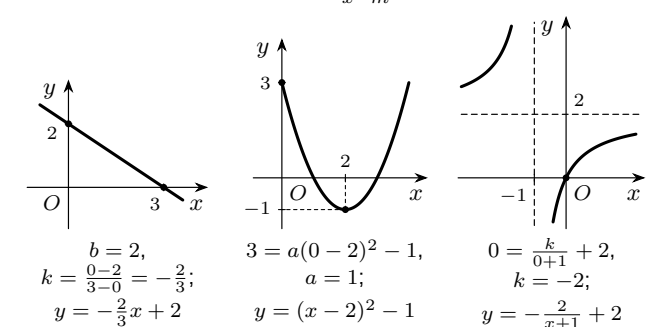
$y = a(x - m)^2 + n$ — парабола з вершиною $(m; n)$;
 $y = |x - m| + n$ — «кут» з вершиною $(m; n)$;
 $y = \sqrt{x - m} + n$ — вітка параболи з початком $(m; n)$;
 $y = \frac{k}{x - m} + n$ — гіпербола з асимптотами $x = m$ і $y = n$.

Функцію виду $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$) зводять до останнього вигляду, виділивши цілу частину:
 $\frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$ — асимптоти $x = 1$ і $y = 1$.

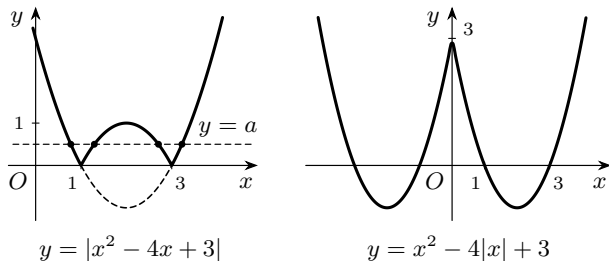
Формула за графіком

Пряму задають двома точками, парабола — вершиною $(x_0; y_0)$ і ще однією точкою:

$y = a(x - x_0)^2 + y_0$; гіперболу — асимптотами $x = m, y = n$ і точкою: $y = \frac{k}{x - m} + n$.



Модуль у графіках. Графічний метод



Для $f(x) = x^2 - 4x + 3$: ліворуч — $y = |f(x)|$ (штрихова — частина графіка f під віссю x , яку відобразили), праворуч — $y = f(|x|)$, парна функція. Графічний метод: корені рівняння $f(x) = g(x)$ — абсциси спільних точок графіків $y = f(x)$ і $y = g(x)$; нерівність $f(x) > g(x)$ виконується при тих x , де графік f лежить вище від графіка g . Кількість коренів рівняння $f(x) = a$ — кількість спільних точок графіка $y = f(x)$ і прямої $y = a$.
Приклад (ліворуч): $|x^2 - 4x + 3| = a$ має 4 корені при $0 < a < 1$, 3 — при $a = 1$, 2 — при $a = 0$ або $a > 1$, жодного — при $a < 0$.

5. Метод інтервалів

10 кл.

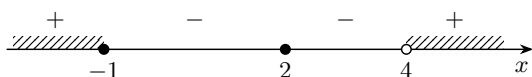
Рациональні нерівності

Для нерівностей $\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{x - x_3} \geq 0$ і подібних:

- 1) усе перенести вліво, звести до дробу, чисельник і знаменник розкласти на множники;
 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ (Д), де x_1, x_2 — корені ($D \geq 0$);
- 2) нулі чисельника й знаменника позначити на прямій: нулі знаменника — порожні точки; нулі чисельника — зафарбовані для $\geq, \leq$ (крім тих, що є й нулями знаменника) і порожні для $>, <$;
- 3) знаки: якщо в усіх множниках коефіцієнт при x додатний, то на крайньому правому проміжку «+»; через точку знак змінюється, якщо множник у непарному степені, і не змінюється, якщо в парному (або за пробною точкою на кожному проміжку);
- 4) відповідь — проміжки з потрібним знаком, а в нестрогій нерівності — ще й зафарбовані точки.

Метод інтервалів: приклад

$\frac{(x + 1)(x - 2)^2}{x - 4} \geq 0$. Нулі чисельника -1 і 2 — зафарбовані; нуль знаменника 4 — порожній. Праворуч від 4 — «+»; через 4 і -1 знак змінюється, через 2 (множник $(x - 2)^2$) — ні.



Відповідь: $(-\infty; -1] \cup \{2\} \cup (4; +\infty)$ (точку 2 легко загубити).

Множник без нулів, який завжди додатний (наприклад, $x^2 + 1$), на знак не впливає.

Множник виду $p - x$ запиши як $-(x - p)$ і зміни знак нерівності: $\frac{3-x}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1} \leq 0$.

6. Числові послідовності

9 кл.

Арифметична прогресія

Послідовність (a_n) : $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$; її задають формулою n -го члена ($a_n = 2n - 1$: $1, 3, 5, \dots$) або рекурентно ($a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n$: $1, 3, 9, \dots$).

Арифметична прогресія: кожний член, починаючи з другого, дорівнює попередньому, до якого додано одне й те саме число d — різницю прогресії:

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad d = a_{n+1} - a_n$$

$$a_n = a_1 + d(n - 1) \quad \text{Д}$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad \text{Д}$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} \cdot n$$

Кожний член, крім першого (і останнього у скінченній прогресії), — середнє арифметичне сусідніх:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Зв'язок двох членів: $a_m = a_k + d(m - k)$.

Приклад: $a_1 = 2, d = 5$: $2, 7, 12, \dots$;

$$a_{10} = 2 + 5 \cdot 9 = 47; \quad S_{10} = \frac{2+47}{2} \cdot 10 = 245.$$

Геометрична прогресія

Геометрична прогресія: перший член $b_1 \neq 0$, а кожний наступний дорівнює попередньому, помноженому на одне й те саме число $q \neq 0$ — знаменник прогресії (тому всі члени відмінні від нуля):

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \quad q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$$b_n = b_1 q^{n-1} \quad \text{Д}$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \quad q \neq 1 \quad \text{Д}$$

Якщо $q = 1$, то всі члени рівні b_1 і $S_n = nb_1$.

Квадрат кожного члена, крім першого (і останнього у скінченній прогресії), дорівнює добутку сусідніх:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Зв'язок двох членів: $b_m = b_k \cdot q^{m-k}$.

Приклад: $b_1 = 3, q = 2$: $3, 6, 12, \dots$; $b_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$;

$$S_5 = \frac{3(2^5 - 1)}{2 - 1} = 93.$$