

Комбінаторика, ймовірність, статистика



Довідник для підготовки до НМТ з математики

□ — формула є в довідкових матеріалах, які можна відкрити під час НМТ. Формули без значка треба пам'ятати.
Позначення (як у підручнику): P_n — кількість перестановок з n елементів; A_n^k, C_n^k — кількість розміщень і комбінацій з n елементів по k ; $P(A)$ — ймовірність події A ; $\bar{x}$ — середнє значення вибірки.

1. Комбінаторика

5, 9, 11 кл.

Правила суми й добутку

Правило суми: якщо елемент a можна вибрати m способами, а елемент b — k способами (спільних варіантів немає), то вибір « a або b » можна здійснити $m + k$ способами.

Правило добутку: якщо елемент a можна вибрати m способами і після кожного такого вибору елемент b можна вибрати k способами, то вибір « a і b » у вказаному порядку, тобто пари $(a; b)$, можна здійснити mk способами. Для трьох елементів (c — n способами) — mkn способів і т. д.

Приклад: з A до B через M

можна проїхати $3 \cdot 2 = 6$

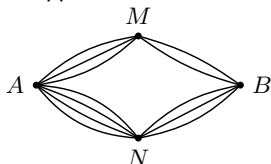
способами, через N —

$4 \cdot 3 = 12$ способами; усього

$6 + 12 = 18$ способів.

Приклад: двоцифрових чисел з різними

цифрами — $9 \cdot 9 = 81$ (перша цифра — будь-яка, крім 0; друга — будь-яка, крім першої).



Перестановки

Перестановка скінченної множини M — будь-яка впорядкована множина, утворена з усіх елементів множини M . Перестановки різняться лише порядком елементів.

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n! \quad \square$$

$n!$ («ен факторіал») — добуток усіх натуральних чисел від 1 до n ; за означенням $0! = 1$.

$$n! = (n-1)! \cdot n \quad (n \in \mathbb{N}), \text{ тому } \frac{8!}{6!} = 7 \cdot 8 = 56.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040

Перестановки множини $\{a, b, c\}$: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$ — $P_3 = 3! = 6$.

Приклад: 4 різні книжки на полиці можна розставити $P_4 = 4! = 24$ способами.

Розміщення

Розміщення з n елементів по k — будь-яка k -елементна впорядкована підмножина даної n -елементної множини ($0 \leq k \leq n$).

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \square$$

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ множників}}, \quad A_n^n = P_n$$

Розміщення з $\{a, b, c\}$ по 2: ab, ba, ac, ca, bc, cb — $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$.

Приклад: голову й секретаря з 10 осіб можна вибрати $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$ способами.

Комбінації (сполуки)

Сполука (комбінація) з n елементів по k — будь-яка k -елементна підмножина заданої n -елементної множини ($0 \leq k \leq n$); порядок елементів не враховують.

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad \square$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}; \quad C_n^0 = C_n^n = 1; \quad C_n^1 = n.$$

Комбінації з $\{a, b, c\}$ по 2: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ — $C_3^2 = 3$.

Приклад: трьох учнів з 8 можна вибрати

$$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56 \text{ способами.}$$

Як вибрати формулу

	порядок важливий	порядок неважливий
беремо всі n елементів	P_n	1 спосіб
беремо k з n елементів	A_n^k	C_n^k

Порядок важливий, якщо обмін двох вибраних елементів місцями дає новий варіант: посади, призові місця, черга, цифри числа. Неважливий — коли вибирають групу: команду, делегацію, набір.

Приклад: з 5 учнів старосту та його заступника можна вибрати $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$ способами, а двох чергових — $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ способами.

Якщо елементи можуть повторюватися (цифри коду), рахують за правилом добутку: кодів із 4 цифр — 10^4 .

Типові задачі з комбінаторики

- Числа з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, усі цифри різні: трицифрових — $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ (на першому місці не 0).

- 8 команд, кожна з кожною грає один матч: $C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ матчів; двічі (удоба й на виїзді) — $A_8^2 = 8 \cdot 7 = 56$ матчів.

- n точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій: відрізків з кінцями в цих точках — C_n^2 , трикутників з вершинами в них — C_n^3 .

- Двох хлопців з 6 і одну дівчину з 4 можна вибрати $C_6^2 \cdot C_4^1 = 15 \cdot 4 = 60$ способами (правило добутку).

- 5 осіб стають у чергу, X і Y — поруч: пару вважаємо одним елементом, усередині пари 2 порядки: $4! \cdot 2! = 48$ способів.

2. Ймовірність

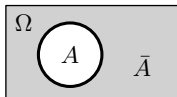
9, 11 кл.

Випадкові події

Випадкова подія — результат дослід (випробування), який може відбутися, а може й не відбутися. Достовірна (вірогідна) подія обов'язково відбудеться, її ймовірність дорівнює 1; неможлива подія не може відбутися, її ймовірність дорівнює 0. Рівноможливі результати — жоден з них не має переваг (грані кубика, сторони монети, кулі чи картки, узяті намання).

Доповнення події A

(протилежна подія) — подія $\bar{A}$, яка відбувається тоді й тільки тоді, коли не відбувається A (Ω — усі результати дослід).



$$P(A) + P(\bar{A}) = 1, \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Приклад: монету підкидають двічі (ГГ, ГЧ, ЧГ, ЧЧ);
 $P(\text{хоча б один герб}) = 1 - P(\text{ЧЧ}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Класичне означення ймовірності

Якщо випробування може закінчитися одним з n рівноможливих результатів, з яких m приводять до настання події A (сприятливі результати), то

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad \text{[Д]}$$

У довідці НМТ: $P(A) = \frac{k}{n}$. Завжди $0 \leq P(A) \leq 1$, бо $0 \leq m \leq n$. Якщо результати не рівноможливі, класичне означення застосовувати не можна.

Приклади: монета — $P(\text{герб}) = \frac{1}{2}$; кубик —
 $P(\text{більше ніж 4 очки}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; картки з числами від 1 до 20 — $P(\text{число, кратне 4}) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

Відносна частота події — відношення кількості її появ до кількості випробувань (у підручнику 9 кл. — «частота»); за великої кількості випробувань вона близька до ймовірності.

Два гральні куби

Кидають два куби:

$n = 6 \cdot 6 = 36$ рівноможливих результатів — пар очок (перший; другий). У таблиці — суми очок.

Сума 4: (1; 3), (2; 2), (3; 1);

$$P = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Кубики розрізняють: (1; 3) і (3; 1) — різні результати. Суми очок не рівноможливі.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Типові задачі на ймовірність

- k монет (або k підкидань однієї): $n = 2^k$ результатів; k кубиків: $n = 6^k$ (правило добутку). Три монети: $n = 8$; $P(\text{усі три однакові}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.
- Навмання вибирають двоцифрове число (іх 90: від 10 до 99): $P(\text{кратне 15}) = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$ (15, 30, 45, 60, 75, 90).
- У коробці 6 білих і кілька чорних куль, $P(\text{біла}) = \frac{3}{8}$. Усього куль $6 : \frac{3}{8} = 16$, чорних $16 - 6 = 10$.
- Ймовірність часто записують у відсотках: $\frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$.

Ймовірність і комбінаторика

Якщо результат дослід — вибір кількох елементів, то n і m рахують за формулами комбінаторики. n і m рахують однаково: обидва з урахуванням порядку або обидва без.

Приклад: у коробці 3 червоні й 5 синіх куль, намання беруть 2 кулі. Усього $n = C_8^2 = 28$ результатів.

Обидві червоні: $m = C_3^2 = 3$, $P = \frac{3}{28}$.

Обидві сині: $m = C_5^2 = 10$, $P = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$.

Хоча б одна червона: $P = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}$.

Приклад: з чотирьох карток з цифрами 1, 2, 3, 4 намання беруть дві й кладуть поруч. Двоцифрових чисел $n = A_4^2 = 12$, з них парних $m = 2 \cdot 3 = 6$ (на кінці 2 або 4, спереду — одна з трьох інших);
 $P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

3. Статистика

5–6, 9, 11 кл.

Вибірка, частота, відносна частота

Вибірка — сукупність зібраних даних, на основі яких проводять дослідження. Частота значення — скільки разів воно трапляється у вибірці; відносна частота — відношення частоти до кількості даних. Приклад: скільки книжок прочитали 10 учнів.

кількість книжок	1	2	3	4
частота (учнів)	1	4	3	2
відносна частота	10 %	40 %	30 %	20 %

Сума частот — 10, сума відносних частот — 100 %.

Ймовірність, що намання вибраний з цих учнів прочитав 2 книжки, дорівнює відносній частоті: $\frac{4}{10} = 40\%$.

Середнє значення, розмах, мода, медіана

Середнє значення вибірки з числових даних $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Розмах — різниця між найбільшим і найменшим значеннями даних.

Мода — те з даних, яке трапляється найчастіше; якщо таких кілька, кожне з них — мода. Моду знаходять і для нечислових даних (розмір одягу, улюблений предмет).

Медіана: дані впорядковують ($x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$).

Якщо n непарне, медіана — те з даних, що стоїть посередині; якщо n парне — середнє арифметичне двох даних посередині: $\frac{x_{n/2} + x_{n/2+1}}{2}$.

Приклад: 7, 3, 9, 1, 4, 8, 3 $\rightarrow$ 1, 3, 3, 4, 7, 8, 9 (7 даних):

$$\bar{x} = \frac{35}{7} = 5; \text{ розмах } 9 - 1 = 8; \text{ мода } 3; \text{ медіана } 4.$$

За таблицею частот (вище), 10 даних:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2}{10} = 2,6 \text{ (ділимо на суму частот);}$$

розмах $4 - 1 = 3$; мода 2; медіана — середнє арифметичне 5-го і 6-го з упорядкованих даних: $\frac{2+3}{2} = 2,5$.

Середнє значення: корисно знати

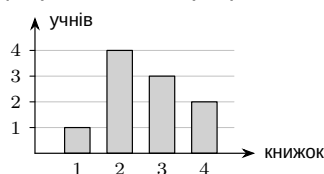
Сума всіх даних дорівнює $\bar{x} \cdot n$. Приклад: середнє чотирьох чисел — 7, три з них 5, 6 і 9; тоді четверте $4 \cdot 7 - (5 + 6 + 9) = 8$.

Середня швидкість — весь шлях, поділений на весь час: 2 год по 60 км/год і 1 год по 90 км/год — $\frac{120+90}{3} = 70$ км/год (а не $\frac{60+90}{2} = 75$).

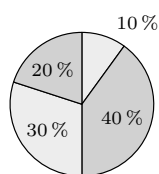
Дуже великі чи дуже малі значення сильно змінюють середнє, а медіану — ні; тоді медіана краще описує «типове» значення.

Таблиці й діаграми

Дані подають текстом, таблицею (як вище), діаграмою або графіком.



стовпчаста діаграма



кругова діаграма

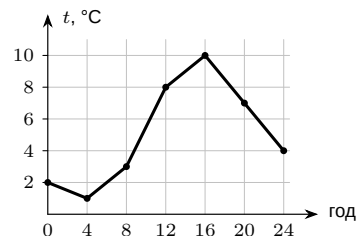
Обидві діаграми — за таблицею частот вище (сектор 40 % — учні, які прочитали 2 книжки).

Стовпчаста діаграма (гістограма): висота стовпчика — значення величини (тут — частота). Зважайте на поділки осі.

Кругова діаграма: круг — уся величина (100 %), сектор — її частина. Кут сектора дорівнює частці, помноженій на 360° ; 1 % — це $3,6^\circ$. Сектор 40 %: $0,4 \cdot 360^\circ = 144^\circ$. Навпаки, сектор 72° — це $\frac{72}{360} = \frac{1}{5} = 20\%$. Якщо ціле — 300 учнів, то 40 % — це $0,4 \cdot 300 = 120$ учнів.

Графік

Графік показує, як величина змінюється з часом: точки (час; значення), сполучені лінією. Тут найвища температура — 10°C о 16 год.



З 4 до 16 год температура зростала, з 0 до 4 і з 16 до 24 год — знижувалася. Середня температура за сімома вимірюваннями:

$$\frac{2+1+3+8+10+7+4}{7} = \frac{35}{7} = 5 \text{ (}^\circ\text{C)}; \text{ розмах } 10 - 1 = 9 \text{ (}^\circ\text{C)}.$$

Стовпчасті діаграми й графіки зручні, щоб показати зміну величини з часом; кругові — щоб порівняти частини цілого.