

Рівняння й нерівності: методи, модуль, параметр



Довідник для підготовки до НМТ з математики

Д — формула є в довідкових матеріалах, які можна відкрити під час НМТ. Формули без значка треба пам'ятати.
Позначення: ОДЗ — область допустимих значень змінної (у підручнику — область визначення рівняння, нерівності); $D(f)$, $E(f)$ — області визначення й значень функції f ; фігурна дужка — система (виконуються всі умови), квадратна — сукупність (виконується хоча б одна); $\Leftrightarrow$ — «рівносильно».

1. Рівносильні перетворення

8–11 кл.

Рівносильні рівняння й наслідки

ОДЗ рівняння $f(x) = g(x)$ — множина $D(f) \cap D(g)$; поза нею коренів немає.

Рівняння рівносильні, якщо мають одні й ті самі корені (або обидва не мають коренів). Друге рівняння — наслідок першого, якщо кожен корінь першого є коренем другого; корені наслідку, які не є коренями даного рівняння, — сторонні.

Рівносильні перетворення: перенесення доданка в другу частину зі зміною знака; множення (ділення) обох частин на число, відмінне від нуля; піднесення обох частин до непарного степеня.

Метод наслідків: переходять до рівняння-наслідку, а всі знайдені корені перевіряють підстановкою в дане рівняння. Метод рівносильних перетворень: кожен перехід рівносильний, умови ОДЗ записують у систему.

Сторонні корені й утрата коренів

Можуть з'явитися сторонні корені (перевірка потрібна), якщо:

- піднести обидві частини до парного степеня: $\sqrt{x} = -x \rightarrow x = x^2$, сторонній корінь $x = 1$;
- розширити ОДЗ (скоротити дріб, замінити $(\sqrt{a})^2$ на a): $\log_x 4 = 2 \rightarrow x^2 = 4$, сторонній корінь $x = -2$;
- помножити обидві частини на вираз $\varphi(x)$ — можуть додатися корені рівняння $\varphi(x) = 0$.

Можна втратити корені, якщо:

- звузити ОДЗ: $\log_2(x-1)^2 = 0 \rightarrow 2\log_2(x-1) = 0$, утрачено корінь $x = 0$; $\sqrt{ab} \rightarrow \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$;
- поділити обидві частини на вираз зі змінною: $x^2 = x \rightarrow x = 1$, утрачено корінь $x = 0$.

Рівносильні нерівності

Рівносильну нерівність (з тією самою множиною розв'язків) отримаємо, якщо до обох частин додати (відняти) одне й те саме число або помножити (поділити) обидві частини на одне й те саме додатне число; на від'ємне число — змінивши знак нерівності на протилежний. На вираз зі змінною — лише якщо на всій ОДЗ він визначений і строго додатний (або строго від'ємний).

Розв'язки нестрогої нерівності $f(x) \geq 0$ — розв'язки $f(x) > 0$ разом із коренями рівняння $f(x) = 0$.

Приклад: $(x^2 - 9)\sqrt{x - 2} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \{2\} \cup [3; +\infty)$ — точку $x = 2$ легко загубити.

2. Методи розв'язування рівнянь

7–11 кл.

Розкладання на множники

$$f(x) \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0, \\ x \in D(f) \cap D(g). \end{cases}$$

Корінь одного множника підходить, лише якщо другий множник у цій точці визначений. Приклад: $(x^2 - 4)\sqrt{x - 1} = 0$: $x = \pm 2$ або $x = 1$; $x = -2$ не входить до ОДЗ ($x \geq 1$), тому корені 1; 2.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0 \end{cases} \quad (x \in \text{ОДЗ})$$

Розкладають винесенням спільного множника, групуванням, за формулами:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad \text{Д}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{Д}$$

Якщо x_0 — корінь многочлена $P(x)$, то $P(x) = (x - x_0)Q(x)$; цілий корінь многочлена з цілими коефіцієнтами — дільник вільного члена.

Заміна змінної

Вираз, що повторюється, позначаємо t , розв'язуємо рівняння відносно t і повертаємося до x .

Обмеження на t враховуємо одразу: $t = x^2 \geq 0$,

$$t = \sqrt{f(x)} \geq 0, \quad t = a^x > 0, \quad t = \sin x \in [-1; 1].$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0: \quad t = x^2;$$

$$(x^2 - 4x)^2 - (x^2 - 4x) - 2 = 0: \quad t = x^2 - 4x;$$

$$\log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0: \quad t = \log_2 x.$$

$$\text{Приклад: } 4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0; \quad t = 2^x > 0:$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0, \quad t = 1 \text{ або } t = 2, \text{ звідси } x = 0 \text{ або } x = 1.$$

Властивості функцій

Оцінка: якщо на ОДЗ $f(x) \leq a$ і $g(x) \geq a$, то

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a. \end{cases}$$

Приклад: $\cos x = 1 + x^2$; $\cos x \leq 1 \leq 1 + x^2$, тому $\cos x = 1$ і $x^2 = 0$, отже, $x = 0$.

Монотонність: якщо f зростає (або спадає) на проміжку, то рівняння $f(x) = a$ має на ньому не більше одного кореня; якщо f зростає, а g спадає, то $f(x) = g(x)$ має не більше одного кореня. Такий корінь досить угадати. Для нерівностей: якщо f зростає на $D(f)$, то $f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow x > x_0$ ($x \in D(f)$).

ОДЗ: якщо вона складається з кількох чисел, досить перевірити кожне з них.

Графічний метод

Корені рівняння

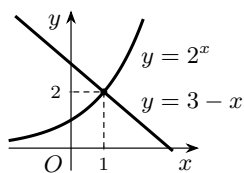
$f(x) = g(x)$ — абсциси

спільних точок графіків

$y = f(x)$ і $y = g(x)$: скільки
спільних точок, стільки й
коренів.

Метод дає наближені
значення, тому корені
перевіряють; він
найзручніший, щоб
визначити кількість
коренів.

Приклад: $2^x = 3 - x$ має єдиний корінь $x = 1$ —
графіки зростаючої та спадної функцій мають не
більше однієї спільної точки.



3. Нерівності

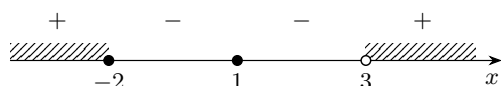
10–11 кл.

Метод інтервалів

Якщо функція неперервна на проміжку й не має на
ньому нулів, то на цьому проміжку вона зберігає
сталій знак. Многочлени й дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (P, Q —
многочлени) неперервні на своїй області
визначення.

Нерівність $f(x) > 0$ ($< 0, \geq 0, \leq 0$), де f неперервна
на $D(f)$, розв'язують так: 1) знаходимо $D(f)$ і нулі
 f ; 2) нулі й межі $D(f)$ розбивають $D(f)$ на проміжки
знакосталості; 3) знак на проміжку — як у будь-якій
його «пробній» точці; 4) записуємо відповідь (для
нестрогої нерівності — разом із нулями). Через
нуль множника в парному степені знак не
змінюється, у непарному — змінюється.

Приклад: $\frac{(x-1)^2(x+2)}{x-3} \geq 0$:



$x \in (-\infty; -2] \cup \{1\} \cup (3; +\infty)$.

Показникові й логарифмічні нерівності

Рівносильні переходи ($a > 0, a \neq 1$):

	$a > 1$	$0 < a < 1$
$a^{f(x)} = a^{g(x)}$	$f(x) = g(x)$	
$a^{f(x)} > a^{g(x)}$	$f(x) > g(x)$	$f(x) < g(x)$
$\log_a f(x) = \log_a g(x)$	$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$	
$\log_a f(x) > \log_a g(x)$	$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Знак нерівності зберігається при $a > 1$ і змінюється
при $0 < a < 1$: функції $y = a^x$ і $y = \log_a x$ зростають
при $a > 1$ і спадають при $0 < a < 1$. Умову
додатності записують для меншого з виразів. Для
 $\geq, <, \leq$ — аналогічно.

Приклад: $\log_2(x-1) < 3 \Leftrightarrow 0 < x-1 < 2^3 \Leftrightarrow$
 $1 < x < 9$.

Ірраціональні рівняння й нерівності — у довіднику
«Степені, корені, логарифми».

4. Системи рівнянь

7–11 кл.

Методи розв'язування систем

Розв'язок системи з двома змінними — пара $(x; y)$,
що задовольняє кожне її рівняння; рівносильні
системи мають ті самі розв'язки.

Підстановка: з одного рівняння виражаємо змінну
(напр., $y = f(x)$) і підставляємо в друге.

Додавання: рівняння, помножені на підібрані числа,
додаємо (віднімаємо), щоб одна змінна зникла;
якщо одне рівняння замінити сумою рівнянь
системи, отримаємо рівносильну систему.

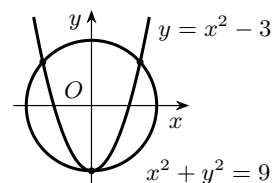
Множення й ділення: якщо $F(x; y) = c_1$ і
 $G(x; y) = c_2$, де $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$, то одне з рівнянь
можна замінити на $F \cdot G = c_1 c_2$ або на $\frac{F}{G} = \frac{c_1}{c_2}$.

Приклад: $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 - xy = 6 \end{cases} \Rightarrow x(x - y) = 6, 2x = 6,$
 $x = 3, y = 1$; розв'язок $(3; 1)$.

Графічний метод для систем

Розв'язки системи —
координати спільних точок
графіків її рівнянь: скільки
спільних точок, стільки
розв'язків.

Система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = x^2 - 3 \end{cases}$ має



три розв'язки: $(-\sqrt{5}; 2)$,
 $(\sqrt{5}; 2)$ і $(0; -3)$ — точку
дотику кола й параболи.

Заміна змінних у системах

Вирази, що повторюються, позначаємо новими
змінними. Однорідний многочлен — усі його члени
одного степеня ($x^2 - 5xy + 6y^2$). Якщо в системі
 $F(x; y) = a, G(x; y) = b$ многочлени F і G однорідні,
зручна заміна $\frac{x}{y} = t$ (пари з $y = 0$ перевіряють
окремо): $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0$,
 $x = 2y$ або $x = 3y$.

Симетричний многочлен не змінюється, якщо x і y
поміняти місцями ($x + y, xy, x^2 + y^2, x^3 + y^3$). Для
таких систем — заміна $x + y = u, xy = v$:
 $x^2 + y^2 = u^2 - 2v, x^3 + y^3 = u(u^2 - 3v)$;
тоді x і y — корені $t^2 - ut + v = 0$;
розв'язки — пари $(t_1; t_2)$ і $(t_2; t_1)$.

5. Рівняння й нерівності з модулем

6–11 кл.

Рівняння з модулем

$|a| = a$, якщо $a \geq 0$; $|a| = -a$, якщо $a < 0$ [Д]

$|a| \geq 0, |-a| = |a|$.

$|f(x)| = a$: якщо $a > 0$, то $f(x) = a$ або $f(x) = -a$;
якщо $a = 0$, то $f(x) = 0$; якщо $a < 0$, коренів немає.

$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$

$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

$|f(x)| = f(x) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$;

$|f(x)| = -f(x) \Leftrightarrow f(x) \leq 0$.

Нерівності з модулем

$|f(x)| < a, a > 0 \Leftrightarrow -a < f(x) < a$ (при $a \leq 0$ розв'язків немає);
 $|f(x)| > a, a \geq 0 \Leftrightarrow f(x) < -a$ або $f(x) > a$ (при $a < 0$ — усі x з ОДЗ).

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x) \end{cases}$$

$|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x)$. Для $\leq$ і $\geq$ — аналогічно, але $|f(x)| \leq 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$.

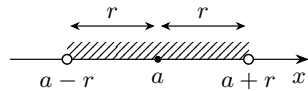
$|x - a|$ — відстань між

точками x і a

координатної прямої:

$$|x - a| < r \Leftrightarrow$$

$$a - r < x < a + r \quad (r > 0).$$



Кілька модулів

Нулі виразів під модулями розбивають числову пряму на проміжки, де знаки цих виразів стали. На кожному проміжку розкриваємо модулі за означенням, розв'язуємо й залишаємо лише розв'язки з цього проміжку. Приклад:

$$|x - 1| + |x + 2| = 5.$$



$x < -2$: $-(x - 1) - (x + 2) = 5$, $x = -3$ — підходить;

$-2 \leq x < 1$: $-(x - 1) + (x + 2) = 5$, $3 = 5$ —

розв'язків немає;

$x \geq 1$: $(x - 1) + (x + 2) = 5$, $x = 2$ — підходить.

Відповідь: -3 ; 2 .

6. Рівняння з параметром

7–11 кл.

Що означає розв'язати рівняння з параметром

Параметр — буква (зазвичай a), яку вважають відомим, але довільним числом. Розв'язати рівняння з параметром — для кожного значення параметра знайти всі корені або встановити, що їх немає. Часто шукають значення параметра, за яких рівняння має задану кількість коренів.

Лінійне рівняння $ax = b$:

	$a \neq 0$	$a = 0, b = 0$	$a = 0, b \neq 0$
корені	$x = \frac{b}{a}$	будь-яке число	коренів немає

Приклад: $(a - 2)x = a^2 - 4$: якщо $a \neq 2$, то $x = a + 2$; якщо $a = 2$, то $0x = 0$ і коренем є будь-яке число.

Нерівність $ax > b$: при $a > 0$ маємо $x > \frac{b}{a}$; при $a < 0$ маємо $x < \frac{b}{a}$; при $a = 0$ розв'язком є будь-яке x , якщо $b < 0$, і розв'язків немає, якщо $b \geq 0$.

Квадратне рівняння, добуток і дріб з параметром

Якщо коефіцієнт при x^2 залежить від параметра, спочатку окремо розглядаємо випадок, коли він дорівнює нулю: рівняння стає лінійним. Далі $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ [Д]; $D = b^2 - 4ac$ [Д]; $D > 0$ — два корені; $D = 0$ — один корінь $x = -\frac{b}{2a}$ [Д]; $D < 0$ — коренів немає.

Приклад: $(a + 6)x^2 - (a - 2)x + 1 = 0$ має один корінь, якщо $a = -6$ (тоді $8x + 1 = 0$) або $D = (a - 2)^2 - 4(a + 6) = a^2 - 8a - 20 = 0$, тобто $a = -2$ чи $a = 10$.

Корінь множника (чисельника) рахуємо, лише якщо він входить до ОДЗ і не є нулем знаменника; однакові корені рахуємо один раз. Приклад: $(x - a)\sqrt{x - 1} = 0$: $x = 1$ — корінь за будь-якого a ; $x = a$ — ще один корінь, якщо $a > 1$. Отже, два корені при $a > 1$, один — при $a \leq 1$.

Заміна змінної в рівнянні з параметром

Рахуємо корені для x , а не для t :

• $t = b^x$ ($b > 0, b \neq 1$): кожному $t > 0$ відповідає один корінь x ; при $t \leq 0$ коренів немає;

• $t = x^2$: кожному $t > 0$ відповідають два корені $x = \pm\sqrt{t}$, значенню $t = 0$ — один корінь $x = 0$; при $t < 0$ коренів немає.

Приклад: $4^x - (a + 1) \cdot 2^x + a = 0$; $t = 2^x > 0$:

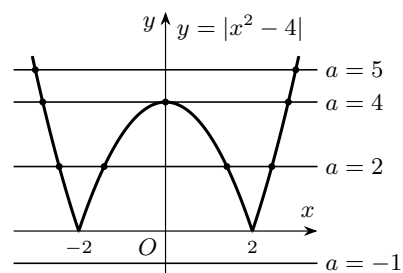
$(t - 1)(t - a) = 0$. Значення $t = 1$ дає $x = 0$, а

$t = a$ — ще один корінь $x = \log_2 a$, якщо $a > 0$ і

$a \neq 1$. Отже, два корені — при $a > 0, a \neq 1$; один — при $a \leq 0$ або $a = 1$.

Графічний метод із параметром

Кількість коренів рівняння $f(x) = a$ дорівнює кількості спільних точок графіка $y = f(x)$ і горизонтальної прямої $y = a$; корені є тоді й лише тоді, коли $a \in E(f)$ (напр., $2^x = a$ — лише при $a > 0$).



$|x^2 - 4| = a$: $a < 0$ — коренів немає; $a = 0$ — два; $0 < a < 4$ — чотири; $a = 4$ — три; $a > 4$ — два.

Часто зручно виразити параметр через x ($a = g(x)$) і шукати, скільки спільних точок має графік $y = g(x)$ (з урахуванням ОДЗ) із прямою $y = a$.

Якщо разом із розв'язком x_0 (або $(x_0; y_0)$)

розв'язком є й $-x_0$ (відповідно $(-x_0; y_0)$), то єдиний розв'язок можливий лише при $x_0 = 0$; знайдені так значення параметра обов'язково перевіряють.