

Планіметрія: формули та властивості



Довідник для підготовки до НМТ з математики

Д — формула є в довідкових матеріалах, які можна відкрити під час НМТ. Формули без значка треба пам'ятати.
Позначення: a, b, c — сторони трикутника; α, β, γ — протилежні їм кути; h_a, m_a — висота й медіана, проведені до сторони a ; p — півпериметр; R, r — радіуси описаного й вписаного кіл; S — площа; P — периметр; $\cup AB$ — дуга AB .

1. Кути, паралельні й перпендикулярні прямі

7–8 кл.

Аксиоми і кути

Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну. Через точку, що не лежить на прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.

Сума суміжних кутів дорівнює 180° . Вертикальні кути рівні.

Бісектриса ділить кут навпіл; кожна її точка рівновіддалена від сторін кута.

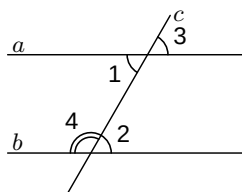
Паралельні прямі й січна

$a \parallel b$, c — січна:

$\angle 1 = \angle 2$ — різносторонні

$\angle 3 = \angle 2$ — відповідні

$\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$ — односторонні



Ознаки паралельності: якщо виконується хоча б одна з цих рівностей, то $a \parallel b$. Дві прямі, перпендикулярні до третьої, паралельні.

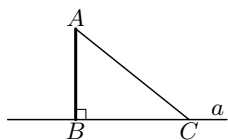
Перпендикуляр і похила

$AB \perp a$: AB — перпендикуляр, AC — похила, BC — її проєкція; $AB < AC$.

Відстань від точки до прямої — довжина перпендикуляра.

Відстань між паралельними прямими — відстань від будь-якої точки однієї з них до другої.

Кожна точка серединного перпендикуляра відрізка рівновіддалена від його кінців.



2. Трикутник

7–9 кл.

Сторони й кути

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad \text{Д}$$

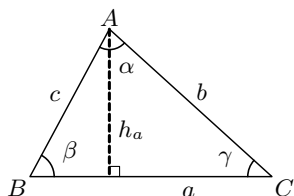
$$p = \frac{a + b + c}{2} \quad \text{Д}$$

(півпериметр)

$a < b + c$ — нерівність трикутника (виконується для кожної сторони)

Зовнішній кут дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.

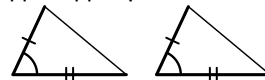
Проти більшої сторони лежить більший кут, і навпаки.



Ознаки рівності трикутників

Трикутники рівні, якщо в них відповідно рівні:

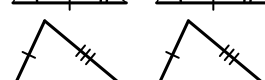
1) дві сторони й кут між ними



2) сторона й два прилеглих до неї кути

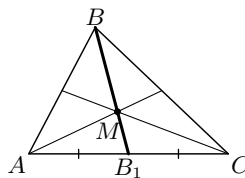


3) три сторони

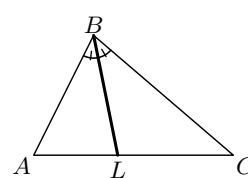


Прямокутні трикутники рівні також: за двома катетами; за катетом і прилеглим (або протилежним) гострим кутом; за гіпотенузою й гострим кутом; за гіпотенузою й катетом.

Медіани, бісектриса, висоти



$$BM : MB_1 = 2 : 1$$



$$AL : LC = AB : AC$$

Медіани перетинаються в одній точці, яка ділить кожну з них у відношенні $2 : 1$, рахуючи від вершини. Бісектриса ділить сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам.

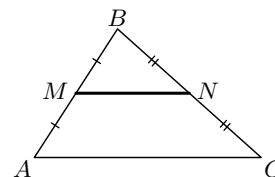
$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

Прямі, які містять висоти трикутника, перетинаються в одній точці.

Середня лінія трикутника

Сполучає середини двох сторін:

$$MN \parallel AC, \quad MN = \frac{1}{2} AC$$



Рівнобедрений і рівносторонній трикутники

Рівнобедрений: кути при основі рівні; бісектриса, проведена до основи, є медіаною й висотою.

Ознаки: два кути рівні; медіана є висотою; бісектриса є висотою; медіана є бісектрисою.

Рівносторонній зі стороною a (усі кути по 60°):

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

3. Прямокутний трикутник

7–8 кл.

Сторони й кути

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{Д}$$

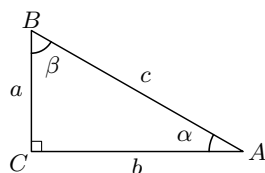
(теорема Піфагора)

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \text{Д}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \quad \text{Д}$$

$$a = c \sin \alpha = c \cos \beta, \quad b = c \cos \alpha$$

$$a = b \operatorname{tg} \alpha, \quad c = \frac{a}{\sin \alpha}, \quad \alpha + \beta = 90^\circ$$



Площа, радіуси R і r , властивості

$$S = \frac{1}{2}ab, \quad R = \frac{c}{2}, \quad r = \frac{a+b-c}{2}$$

Катет, що лежить проти кута 30° , дорівнює половині гіпотенузи. Центр описаного кола — середина гіпотенузи; медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює її половині.

Часто трапляються сторони 3, 4, 5; 5, 12, 13; 8, 15, 17; 7, 24, 25 (і кратні їм).

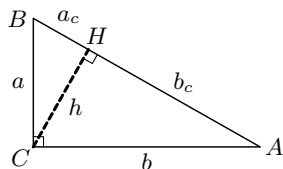
Висота, проведена до гіпотенузи

a_c, b_c — проєкції катетів a і b на гіпотенузу c :

$$h^2 = a_c \cdot b_c$$

$$a^2 = c \cdot a_c, \quad b^2 = c \cdot b_c$$

$$h = \frac{ab}{c}$$



4. Синус, косинус і тангенс кута від 0° до 180°

8–9 кл.

Означення й основні формули

M — точка одиничного півкола: $\cos \alpha$ — її абсциса, $\sin \alpha$ — ордината. Д

Якщо кут α тупий: $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$, $\operatorname{tg} \alpha < 0$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{Д} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \text{Д}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \text{Д}$$

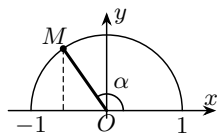
$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha \quad \text{Д} \quad \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha \quad \text{Д}$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \text{Д}$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \quad \text{Д}$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \quad \text{Д}$$



Значення для деяких кутів

α	$\sin$	$\cos$	tg	α	$\sin$	$\cos$	tg
0°	0	1	0	120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	180°	0	-1	0
90°	1	0	не існує				

Кути $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ є в довідці НМТ Д; значення для $120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$ отримують за формулами для $180^\circ - \alpha$.

5. Розв'язування трикутників

9 кл.

Теорема косинусів

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad \text{Д} \quad \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Кут α лежить проти сторони a , тобто між сторонами b і c .

Якщо a — найбільша сторона: $a^2 < b^2 + c^2$ — трикутник гострокутний; $a^2 = b^2 + c^2$ — прямокутний; $a^2 > b^2 + c^2$ — тупокутний.

Теорема синусів

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \quad \text{Д}$$

Звідси $a = 2R \sin \alpha$: хорда кола дорівнює добутку діаметра на синус вписаного кута, що спирається на цю хорду.

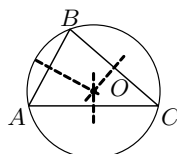
Площа трикутника

$$S = \frac{1}{2} a h_a \quad \text{Д} \quad S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \quad \text{Д}$$

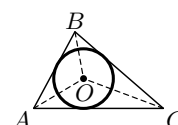
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{Д} \quad \text{(формула Герона; } p \text{ — півпериметр)}$$

$$S = pr \quad S = \frac{abc}{4R}$$

Описане й вписане кола трикутника



$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$



$$r = \frac{S}{p}$$

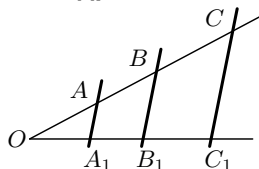
Центр описаного кола — точка перетину серединних перпендикулярів сторін; центр вписаного — точка перетину бісектрис. Центр описаного кола гострокутного трикутника лежить усередині нього, прямокутного — на середині гіпотенузи, тупокутного — поза трикутником.

6. Подібність трикутників

8–9 кл.

Теорема Фалеса й пропорційні відрізки

Якщо паралельні прямі відтинають на одній стороні кута рівні відрізки, то й на другій стороні вони відтинають рівні відрізки.



Теорема про пропорційні відрізки: якщо

$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$, то $AB : BC = A_1B_1 : B_1C_1$.

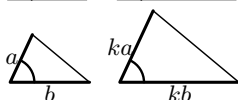
Подібні трикутники

Трикутники подібні, якщо:

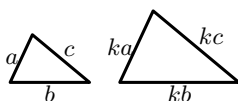
1) два кути одного дорівнюють двом кутам другого



2) дві сторони одного пропорційні двом сторонам другого, а кути між ними рівні



3) три сторони одного пропорційні трьом сторонам другого



$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k \quad \frac{P_1}{P} = k, \quad \frac{S_1}{S} = k^2$$

k — коефіцієнт подібності. Відношення площ подібних фігур дорівнює k^2 ; відношення відповідних висот, медіан, бісектрис дорівнює k . Пряма, паралельна стороні трикутника, відтинає від нього трикутник, подібний даному.

7. Чотирикутники

8–9 кл.

Будь-який чотирикутник

Сума кутів чотирикутника дорівнює 360° .

Опуклий чотирикутник: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$ (φ — кут між діагоналями)

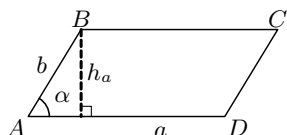
Паралелограм

$$S = a h_a \quad (\text{А})$$

$$S = ab \sin \alpha \quad (\text{А})$$

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$$

(d_1, d_2 — діагоналі)



Властивості: протилежні сторони рівні; протилежні кути рівні; діагоналі точкою перетину діляться навпіл; сума кутів, прилеглих до однієї сторони, — 180° .

Ознаки: чотирикутник — паралелограм, якщо його протилежні сторони попарно рівні, або дві протилежні сторони рівні й паралельні, або діагоналі точкою перетину діляться навпіл. Бісектриса кута паралелограма відтинає від нього рівнобедрений трикутник.

Прямокутник, ромб, квадрат

Ромб: діагоналі $d_1 = AC$ і

$d_2 = BD$ перпендикулярні й ділять його кути навпіл.

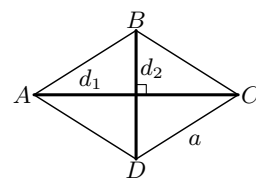
$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \quad (\text{А})$$

$$S = ah = a^2 \sin \alpha, \quad r = \frac{h}{2}$$

(α — кут ромба, h — висота)

Прямокутник: діагоналі рівні; $d^2 = a^2 + b^2$;

$$S = ab \quad (\text{А}); \quad R = \frac{d}{2}.$$



Квадрат: $d = a\sqrt{2}$; $S = a^2 = \frac{d^2}{2}$; $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $r = \frac{a}{2}$.

Паралелограм з прямим кутом або з рівними діагоналями — прямокутник; з перпендикулярними діагоналями або з діагоналлю, що є бісектрисою кута, — ромб.

Трапеція

$a \parallel b$ — основи, m — середня лінія:

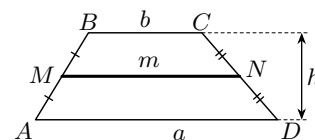
$$m = \frac{a+b}{2}, \quad m \parallel a$$

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h \quad (\text{А})$$

$$S = m \cdot h$$

Сума кутів, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180° .

Рівнобічна трапеція: кути при кожній основі рівні, діагоналі рівні; висота, проведена з вершини тупого кута, ділить більшу основу на відрізки $\frac{a-b}{2}$ і $\frac{a+b}{2}$.



Вписаний і описаний чотирикутники

Вписаний у коло: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$ (і навпаки). Тому з трапецій у коло можна вписати лише рівнобічну, а з паралелограмів — лише прямокутник.

Описаний навколо кола: $AB + CD = BC + AD$ (і навпаки, для опуклого); $S = pr$. Для описаної трапеції сума основ дорівнює сумі бічних сторін, а $h = 2r$.

8. Многокутники

8–9 кл.

Опуклий многокутник

Сума кутів n -кутника: $180^\circ(n-2)$. Сума зовнішніх кутів, узятих по одному при кожній вершині, — 360° .

Кількість діагоналей: $\frac{n(n-3)}{2}$. Периметр P — сума довжин усіх сторін.

Площа многокутника, описаного навколо кола: $S = pr$.

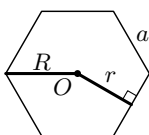
Правильний багатокутник

Усі сторони рівні й усі кути рівні;
центри вписаного й описаного
кіл збігаються.

$$\text{Кут: } \frac{180^\circ(n-2)}{n}$$

$$\text{Центральний кут: } \frac{360^\circ}{n}$$

$$R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}, \quad r = \frac{a}{2 \tan \frac{180^\circ}{n}}, \quad S = \frac{1}{2} Pr$$



	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
R	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	a
r	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Правильний
шестикутник
складається з 6
рівносторонніх
трикутників:

$$S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

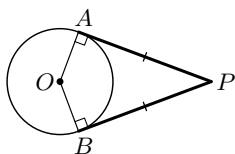
9. Коло і круг

7–9 кл.

Хорди й дотичні

$$d = 2R.$$

Діаметр, перпендикулярний
до хорди, ділить її навпіл.
Дотична перпендикулярна
до радіуса, проведеного в
точку дотику: $OA \perp PA$.
Відрізки дотичних з однієї
точки рівні: $PA = PB$.



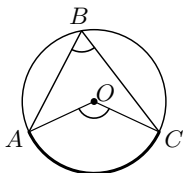
Центральні й вписані кути

Центральний кут дорівнює дузі,
на яку спирається:

$$\angle AOC = \cup AC$$

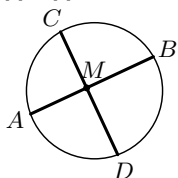
Вписаний кут дорівнює
половині дуги, на яку
спирається:

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC = \frac{1}{2} \angle AOC$$

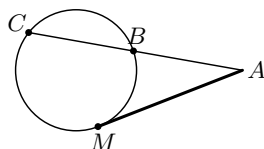


Вписані кути, що спираються на одну дугу, рівні.
Вписаний кут, що спирається на діаметр, — прямий.
Кут між дотичною і хордою, проведеною в точку
дотику, дорівнює половині дуги, що лежить
усередині цього кута.

Хорди, дотична і січна



$$AM \cdot MB = CM \cdot MD$$



$$AM^2 = AB \cdot AC$$

Ліворуч — хорди, що перетинаються; праворуч —
дотична AM і січна ABC .

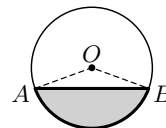
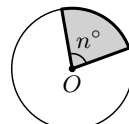
Довжина кола, площа круга

$$C = 2\pi R \quad \text{Д} \text{ — довжина кола}$$

$$l = \frac{\pi R n}{180} \text{ — довжина дуги в } n^\circ$$

$$S = \pi R^2 \quad \text{Д} \text{ — площа круга}$$

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} \text{ — площа сектора}$$



Площа сегмента: $S_{\text{сегм}} = S_{\text{сект}} - S_{\triangle AOB}$, якщо дуга
менша від 180° , і $S_{\text{сегм}} = S_{\text{сект}} + S_{\triangle AOB}$, якщо
більша.

Радіанна міра: $\pi \text{ рад} = 180^\circ$. Для кута α у радіанах:
 $l = R\alpha$, $S_{\text{сект}} = \frac{1}{2} R^2 \alpha$.

10. Координати на площині

9 кл.

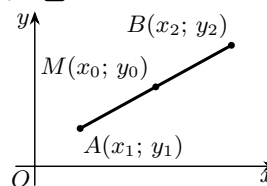
Відстань, середина, рівняння

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{Д}$$

Середина M відрізка AB :

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{Д}$$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad \text{Д}$$



Коло з центром $(a; b)$ і радіусом R :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad \text{Д}$$

Пряма: $ax + by = c$ (a і b не дорівнюють нулю
одночасно).

Невертикальна пряма: $y = kx + b$, $k = \tan \alpha$ —
кутовий коефіцієнт (α — кут між прямою й
додатним напрямом осі абсцис, $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$; для
спадної прямої кут α тупий і $k < 0$).

Прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ паралельні, якщо
 $k_1 = k_2$ і $b_1 \neq b_2$.

11. Вектори

9 кл.

Координати й дії

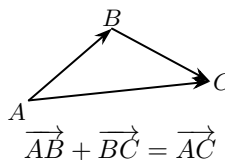
$$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2): \vec{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1) \quad \text{Д}$$

$$\vec{a}(a_1; a_2): |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{Д}$$

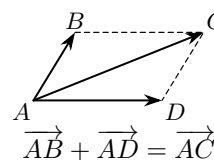
$$\vec{a} + \vec{b}(a_1 + b_1; a_2 + b_2), \quad \vec{a} - \vec{b}(a_1 - b_1; a_2 - b_2),$$

$$k\vec{a}(ka_1; ka_2)$$

Нульовий вектор $\vec{0}(0; 0)$. Протилежні вектори
мають рівні модулі й протилежні напрями.



$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$



$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$$

Ліворуч — правило трикутника, праворуч —
правило паралелограма.

$$\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}, \quad \vec{AB} = -\vec{BA}$$

Колінеарні вектори ($\vec{a} \neq \vec{0}$): $\vec{b} = k\vec{a} \Leftrightarrow b_1 = ka_1$,
 $b_2 = ka_2$ (координати пропорційні). Рівні вектори
мають рівні координати.

Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, то будь-який вектор можна
єдиним чином подати у вигляді $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

$$M \text{ — середина відрізка } AB: \vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}).$$

Скалярний добуток

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi \quad \text{Д} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad \text{Д}$$

$$\cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

Для ненульових векторів: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$.

Якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, кут між векторами тупий або розгорнутий (180° , коли вектори протилежно напрямлені).

Властивості: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$; $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$;
 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

12. Геометричні перетворення

9 кл.

Рухи й гомотетія

Рух (переміщення) зберігає відстані між точками; фігури рівні, якщо одну можна отримати з другої рухом. Рухи: паралельне перенесення, осьова й центральна симетрії, поворот.

Образ точки $(x; y)$:

- перенесення на $\vec{a}(m; n)$: $(x + m; y + n)$
- симетрія відносно початку координат: $(-x; -y)$
- симетрія відносно осі абсцис: $(x; -y)$; осі ординат: $(-x; y)$

Центральна симетрія з центром O : O — середина AA_1 . Осьова симетрія відносно прямої l : l — серединний перпендикуляр відрізка AA_1 . Поворот навколо O на кут φ : $OA_1 = OA$, $\angle AOA_1 = \varphi$.

Гомотетія з центром O і коефіцієнтом k :

$\vec{OX_1} = k \vec{OX}$, $A_1 B_1 = |k| \cdot AB$; площі фігур змінюються в k^2 разів.