

Похідна та інтеграл

Довідник для підготовки до НМТ з математики



Д — формула є в довідкових матеріалах, які можна відкрити під час НМТ. Формули без значка треба пам'ятати.
Позначення (як у підручнику): $f'(x_0)$ — похідна функції f у точці x_0 ; Δx , Δf — прирости аргументу й функції; $x_{\max}$, $x_{\min}$ — точки максимуму й мінімуму; F — первісна функції f . У довідці НМТ правила диференціювання записано через u , v і сталу C .

1. Похідна

10 кл.

Приріст і похідна

$\Delta x = x - x_0$ — приріст аргументу в точці x_0 ;

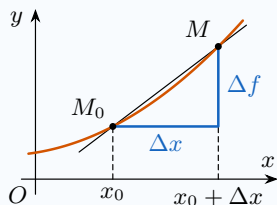
$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — приріст функції (позначають і Δy);

$\frac{\Delta f}{\Delta x}$ — кутовий коефіцієнт січної M_0M .

Похідна функції f у точці x_0 — границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Функцію, яка має похідну в точці x_0 , називають диференційовною в цій точці; знаходження похідної — диференціювання. У точках розриву й «злому» графіка (як у $y = |x|$ при $x = 0$) і там, де дотична вертикальна, похідної немає.



Геометричний зміст похідної

Кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 дорівнює $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = k = \tan \alpha$$

α — кут між дотичною і додатним напрямом осі абсцис ($0 \leq \alpha < \pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$).

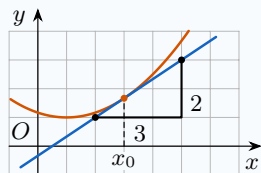
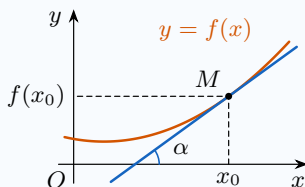
$f'(x_0) > 0$ — кут α гострий; $f'(x_0) < 0$ — тупий;

$f'(x_0) = 0$ — дотична горизонтальна.

Якщо дотичну зображено на клітинках, беруть дві її точки з цілими координатами $(x_1; y_1)$ і $(x_2; y_2)$:

$$f'(x_0) = k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

На рисунку $f'(x_0) = \frac{2}{3}$. Для спадної дотичної $f'(x_0) < 0$.



Механічний (фізичний) зміст похідної

Якщо $s(t)$ — закон руху матеріальної точки по координатній прямій, то її миттєва швидкість і прискорення:

$$v(t) = s'(t), \quad a(t) = v'(t) = s''(t)$$

Приклад: $s(t) = t^2 - 4t$; $v(t) = 2t - 4$; $a(t) = 2$. У момент $t = 2$ швидкість дорівнює нулю — точка змінює напрям руху.

Рівняння дотичної

Дотична до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 (f диференційовна в точці x_0):

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Знаходимо $f(x_0)$, $f'(x)$, $f'(x_0)$ і підставляємо.

Приклад: $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$, $x_0 = -2$: $f(-2) = -2$, $f'(x) = -4 - 6x$, $f'(-2) = 8$; $y = 8(x + 2) - 2$, тобто $y = 8x + 14$.

Дотична паралельна прямій $y = kx + b$: $f'(x_0) = k$ (звідси знаходять x_0). Горизонтальна дотична: $f'(x_0) = 0$.

Приклад: дотична до графіка $f(x) = e^{3x} + x$, паралельна прямій $y = 4x - 9$: $f'(x) = 3e^{3x} + 1 = 4$, звідси $x_0 = 0$, $f(0) = 1$; $y = 4x + 1$.

2. Обчислення похідних

10–11 кл.

Таблиця похідних

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	0 Д	$\sin x$	$\cos x$ Д
x	1 Д	$\cos x$	$-\sin x$ Д
$kx + b$	k	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$ Д
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$ Д	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	a^x	$a^x \ln a$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ Д	$\ln x$	$\frac{1}{x}$ Д
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
e^x	e^x Д		

C , k , b , α — сталі; $a > 0$, $a \neq 1$; $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$;
 $e \approx 2,718$, $\ln x = \log_e x$. Формули для $\sqrt{x}$, $\sqrt[n]{x}$, $\ln x$, $\log_a x$, x^α діють при $x > 0$; для $\sqrt[n]{x}$ з непарним n — при $x \neq 0$, для x^α з цілим α — на всій області визначення.

Правила диференціювання

У точках, де функції f і g диференційовні; k — число:

$$(f + g)' = f' + g' \quad (f - g)' = f' - g' \quad \text{Д}$$

$$(kf)' = kf' \quad (fg)' = f'g + g'f \quad \text{Д}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \quad \text{Д} \quad (g \neq 0)$$

Приклади: $(x^3 \cos x)' = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$;

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}.$$

Похідна складеної функції (g диференційовна в точці x , f — у точці $g(x)$):

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Приклади: $((3x - 7)^6)' = 6(3x - 7)^5 \cdot 3 = 18(3x - 7)^5$;

$$(\sin 2x)' = 2 \cos 2x; \quad (e^{-7x})' = -7e^{-7x}.$$

Зокрема, $(f(kx + b))' = k f'(kx + b)$.

Зростання і спадання

Якщо для всіх x із проміжку I виконується нерівність $f'(x) > 0$, то функція f зростає на цьому проміжку; якщо $f'(x) < 0$ — спадає на цьому проміжку.

Якщо $f'(x) = 0$ для всіх $x \in I$, то f — константа на I .

Проміжки зростання і спадання шукають як проміжки знакосталості f' (методом інтервалів).

Кінці проміжків, у яких функція неперервна, включають.

Приклад: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$,

$f'(x) = 6(x+1)(x-2)$: f зростає на кожному з проміжків $(-\infty; -1]$ і $[2; +\infty)$, спадає на $[-1; 2]$.

Точки екстремуму

x_0 — точка максимуму функції f , якщо існує окіл точки x_0 , для всіх x з якого $f(x_0) \geq f(x)$; точка мінімуму — якщо $f(x_0) \leq f(x)$. Позначають $x_{\max}$, $x_{\min}$. Окіл точки — проміжок $(a; b)$, що її містить.

Критичні точки — внутрішні точки області визначення функції, у яких похідна дорівнює нулю або не існує. Кожна точка екстремуму — критична (необхідна умова), але не навпаки: для $y = x^3$ маємо $y'(0) = 0$, а екстремуму немає.

Достатня умова (f неперервна в критичній точці x_0): якщо при переході через x_0 похідна змінює знак з «+» на «-», то x_0 — точка максимуму; з «-» на «+» — точка мінімуму; якщо знак не змінюється, то екстремуму в точці x_0 немає.

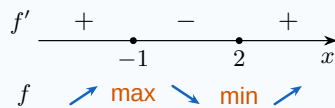
Приклад:

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$;

$x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 2$.

Значення функції в точках екстремуму:

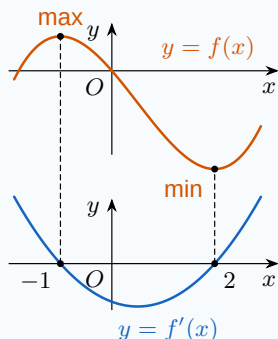
$f(-1) = 7$, $f(2) = -20$.

**Графік функції і графік її похідної**

Якщо диференційовна функція f зростає на проміжку, то на ньому $f'(x) \geq 0$; якщо спадає — $f'(x) \leq 0$. У точці екстремуму, де f диференційовна, $f'(x_0) = 0$ (дотична горизонтальна).

За графіком $y = f'(x)$: де він вище від осі абсцис — f зростає, де нижче — спадає. Нулі f' , у яких графік f' перетинає вісь згори вниз, — точки максимуму f ; знизу вгору — точки мінімуму.

Якщо графік f' лише дотикається до осі (знак не змінюється), екстремуму немає.

**Найбільше і найменше значення на відрізку**

Неперервна на відрізку $[a; b]$ функція набуває найбільшого і найменшого значень або на кінцях відрізка, або в точках екстремуму. Схема:

1) знайти критичні точки функції f , які належать відрізку $[a; b]$;

2) обчислити значення функції в цих точках і на кінцях відрізка;

3) з усіх знайдених значень вибрати найбільше і найменше.

Приклад: $f(x) = x^3 - 3x$ на

$[0; 2]$:

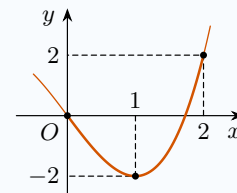
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ при $x = \pm 1$;

відрізку належить $x = 1$;

$f(0) = 0$, $f(1) = -2$, $f(2) = 2$.

Отже, $\max_{[0; 2]} f(x) = f(2) = 2$,

$\min_{[0; 2]} f(x) = f(1) = -2$.



Прикладна задача: шукану величину записують як функцію однієї змінної на проміжку її можливих значень і знаходять найбільше (найменше) значення цієї функції.

Дослідження функції й побудова графіка

1) $D(f)$; 2) парність; 3) нулі; 4) проміжки знакосталості; 5) проміжки зростання і спадання; 6) точки екстремуму та значення функції в них; 7) інші особливості (періодичність, поведінка поблизу важливих точок тощо). За цими даними будують графік.

4. Первісна

11 кл.

Первісна та її загальний вигляд

Функцію F називають первісною функції f на проміжку I , якщо для всіх $x \in I$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Приклад: $F(x) = x^2$ — первісна функції $f(x) = 2x$, бо $(x^2)' = 2x$.

Якщо F — первісна функції f на I , то будь-яку первісну функції f на I можна записати у вигляді

$F(x) + C$ (або $F(x) + C$) (C — довільне число)

Цей запис називають загальним виглядом первісних. Графіки первісних отримують один з одного паралельним перенесенням уздовж осі ординат.

Первісну, графік якої проходить через точку

$M(x_0; y_0)$, знаходять з умови $F(x_0) + C = y_0$.

Приклад: $f(x) = 2 \cos x$, $M(\frac{5\pi}{6}; 3)$: $2 \sin \frac{5\pi}{6} + C = 3$, $C = 2$; $F(x) = 2 \sin x + 2$.

Оскільки $F' = f$, первісна F зростає на проміжках, де $f(x) > 0$, і спадає на проміжках, де $f(x) < 0$.

Закон руху $s(t)$ — первісна швидкості $v(t)$, бо $s'(t) = v(t)$.

Таблиця первісних

$f(x)$	$F(x) + C$	$f(x)$	$F(x) + C$
0	C [Д]	e^x	$e^x + C$ [Д]
1	$x + C$ [Д]	a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
k	$kx + C$	$\sin x$	$-\cos x + C$ [Д]
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ [Д]	$\cos x$	$\sin x + C$ [Д]
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$ [Д]	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$ [Д]
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1} \sqrt[n+1]{x} + C$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$

C — довільне число, k — стала; $\alpha \neq -1$; $a > 0$, $a \neq 1$; $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Формули діють на проміжках з $D(f)$: для $\frac{1}{x}$ і цілих $\alpha \leq -2$ — на $(-\infty; 0)$ або $(0; +\infty)$, для нецілих α — на $(0; +\infty)$. Корені й дробки записують як степені: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$.

Правила знаходження первісних

Якщо F і G — первісні функції f і g на проміжку I , k — число, то:

- $F(x) + G(x)$ — первісна функції $f(x) + g(x)$;
- $kF(x)$ — первісна функції $kf(x)$;
- $\frac{1}{k} F(kx + b)$ — первісна функції $f(kx + b)$, якщо $k \neq 0$.

Приклади: $\cos(3x + 1) \rightarrow \frac{1}{3} \sin(3x + 1) + C$;
 $e^{2x} \rightarrow \frac{1}{2} e^{2x} + C$;

$(2x - 1)^4 \rightarrow \frac{(2x-1)^5}{10} + C$.

Первісна добутку (частки) не дорівнює добутку (частці) первісних: спочатку спрощують вираз (розкривають дужки, ділять почленно).

5. Визначений інтеграл

11 кл.

Визначений інтеграл

Нехай F — первісна функції f на проміжку I , числа a і b , де $a < b$, належать I . Різницю $F(b) - F(a)$ називають визначеним інтегралом функції f на відрізку $[a; b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad [Д]$$

Це формула Ньютона–Лейбніца (F — будь-яка первісна). Приклад:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sin \frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2}$$

Зокрема, $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$, бо f — первісна функції f' .

Властивості визначеного інтеграла

k — число, $c \in (a; b)$:

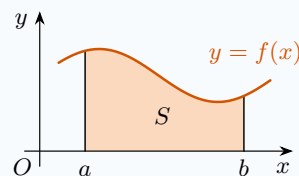
$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Площа криволінійної трапеції

Криволінійна трапеція — фігура, обмежена графіком неперервної й невід'ємної на $[a; b]$ функції f і прямими $y = 0$, $x = a$, $x = b$.



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

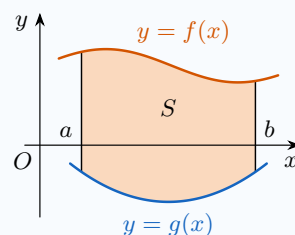
Приклад: фігура, обмежена параболою $y = 4x - x^2$ і віссю абсцис ($x = 0$ і $x = 4$ — нулі функції):

$$S = \int_0^4 (4x - x^2) dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^4 = \frac{32}{3}$$

Якщо $f \geq 0$ і графік f — ламана, то $\int_a^b f(x) dx$ — площа фігури під нею (трикутники, трапеції).

Площа фігури між графіками

Якщо функції f і g неперервні на $[a; b]$ і $f(x) \geq g(x)$ для всіх $x \in [a; b]$, то площа фігури, обмеженої їхніми графіками та прямими $x = a$, $x = b$:



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Межі інтегрування

Якщо фігуру обмежено лише графіками, то a і b — абсциси точок їх перетину, тобто корені рівняння $f(x) = g(x)$.

Приклад: $y = 2x$ і $y = x^2$ перетинаються при $x = 0$ і $x = 2$; на $[0; 2]$ маємо $2x \geq x^2$:

$$S = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3}$$

Площа й знак функції

Якщо f неперервна й $f \leq 0$ на $[a; b]$, то площа фігури, обмеженої графіком f , віссю абсцис і прямими $x = a$, $x = b$:

$$S = - \int_a^b f(x) dx.$$

Якщо f на $[a; b]$ змінює знак, то $\int_a^b f(x) dx = S_1 - S_2$, а площа всієї фігури $S = S_1 + S_2$ (S_1 — площа частин над віссю абсцис, S_2 — під нею).

