

# Похідна та інтеграл

Довідник для підготовки до НМТ з математики



**Д** — формула є в довідкових матеріалах, які можна відкрити під час НМТ. Формули без значка треба пам'ятати. Позначення (як у підручнику):  $f'(x_0)$  — похідна функції  $f$  у точці  $x_0$ ;  $\Delta x$ ,  $\Delta f$  — прирости аргументу й функції;  $x_{\max}$ ,  $x_{\min}$  — точки максимуму й мінімуму;  $F$  — первісна функції  $f$ . У довідці НМТ правила диференціювання записано через  $u$ ,  $v$  і сталу  $C$ .

**Підручник** — клас і пункт підручника А. Г. Мерзляка та ін. (алгебра і початки аналізу, профільний рівень: 10 кл. — 2018, 11 кл. — 2019). **НМТ** — номери завдань НМТ, де ця тема траплялася у 2024–2026 рр.: № 12 — похідна, первісна, інтеграл (площа); № 16 — властивості функцій, зокрема екстремуми; № 19 — похідна (екстремум, дотична) або первісна.

## 1. Похідна

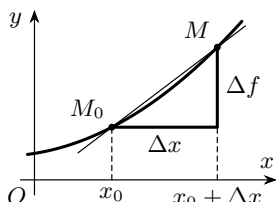
10 кл.

### Приріст і похідна

$\Delta x = x - x_0$  — приріст аргументу в точці  $x_0$ ;

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  — приріст функції (позначають і  $\Delta y$ );

$\frac{\Delta f}{\Delta x}$  — кутовий коефіцієнт січної  $M_0M$ .



Похідна функції  $f$  у точці  $x_0$  — границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Функцію, яка має похідну в точці  $x_0$ , називають диференційовною в цій точці; знаходження похідної — диференціювання. У точках розриву й «злому» графіка (як у  $y = |x|$  при  $x = 0$ ) і там, де дотична вертикальна, похідної немає.

**Підручник** 10 кл., п. 35, 36

**НМТ** № 12

### Геометричний зміст похідної

Кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції  $f$  у точці з абсцисою  $x_0$  дорівнює  $f'(x_0)$ :

$$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$$

$\alpha$  — кут між дотичною і додатним напрямом осі абсцис ( $0 \leq \alpha < \pi$ ,  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ ).

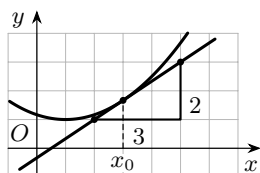
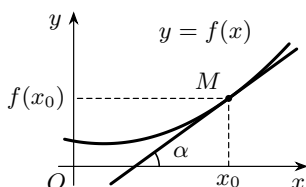
$f'(x_0) > 0$  — кут  $\alpha$  гострий;  $f'(x_0) < 0$  — тупий;

$f'(x_0) = 0$  — дотична горизонтальна.

Якщо дотичну зображено на клітинках, беруть дві її точки з цілими координатами  $(x_1; y_1)$  і  $(x_2; y_2)$ :

$$f'(x_0) = k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

На рисунку  $f'(x_0) = \frac{2}{3}$ . Для спадної дотичної  $f'(x_0) < 0$ .



**Підручник** 10 кл., п. 35, 36

**НМТ** № 12, 19

### Механічний (фізичний) зміст похідної

Якщо  $s(t)$  — закон руху матеріальної точки по координатній прямій, то її миттєва швидкість і прискорення:

$$v(t) = s'(t), \quad a(t) = v'(t) = s''(t)$$

Приклад:  $s(t) = t^2 - 4t$ ;  $v(t) = 2t - 4$ ;  $a(t) = 2$ . У момент  $t = 2$  швидкість дорівнює нулю — точка змінює напрям руху.

**Підручник** 10 кл., п. 35, 36, 39, 42

**НМТ** № 12

### Рівняння дотичної

Дотична до графіка функції  $f$  у точці з абсцисою  $x_0$  ( $f$  диференційовна в точці  $x_0$ ):

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Знаходимо  $f(x_0)$ ,  $f'(x)$ ,  $f'(x_0)$  і підставляємо.

Приклад:  $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$ ,  $x_0 = -2$ :  $f(-2) = -2$ ,  $f'(x) = -4 - 6x$ ,  $f'(-2) = 8$ ;  $y = 8(x + 2) - 2$ , тобто  $y = 8x + 14$ .

Дотична паралельна прямій  $y = kx + b$ :  $f'(x_0) = k$  (звідси знаходять  $x_0$ ). Горизонтальна дотична:  $f'(x_0) = 0$ .

Приклад: дотична до графіка  $f(x) = e^{3x} + x$ , паралельна прямій  $y = 4x - 9$ :  $f'(x) = 3e^{3x} + 1 = 4$ , звідси  $x_0 = 0$ ,  $f(0) = 1$ ;  $y = 4x + 1$ .

**Підручник** 10 кл., п. 38; 11 кл., п. 8

**НМТ** № 19

## 2. Обчислення похідних

10–11 кл.

### Таблиця похідних

| $f(x)$        | $f'(x)$                         | $f(x)$                 | $f'(x)$                       |
|---------------|---------------------------------|------------------------|-------------------------------|
| $C$           | 0 <b>Д</b>                      | $\sin x$               | $\cos x$ <b>Д</b>             |
| $x$           | 1 <b>Д</b>                      | $\cos x$               | $-\sin x$ <b>Д</b>            |
| $kx + b$      | $k$                             | $\operatorname{tg} x$  | $\frac{1}{\cos^2 x}$ <b>Д</b> |
| $x^\alpha$    | $\alpha x^{\alpha-1}$ <b>Д</b>  | $\operatorname{ctg} x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$         |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$                | $a^x$                  | $a^x \ln a$                   |
| $\sqrt{x}$    | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ <b>Д</b>  | $\ln x$                | $\frac{1}{x}$ <b>Д</b>        |
| $\sqrt[n]{x}$ | $\frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$ | $\log_a x$             | $\frac{1}{x \ln a}$           |
| $e^x$         | $e^x$ <b>Д</b>                  |                        |                               |

$C$ ,  $k$ ,  $b$ ,  $\alpha$  — сталі;  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ;  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ;

$e \approx 2,718$ ,  $\ln x = \log_e x$ . Формули для  $\sqrt{x}$ ,  $\sqrt[n]{x}$ ,  $\ln x$ ,  $\log_a x$ ,  $x^\alpha$  діють при  $x > 0$ ; для  $\sqrt[n]{x}$  з непарним  $n$  — при  $x \neq 0$ , для  $x^\alpha$  з цілим  $\alpha$  — на всій області визначення.

**Підручник** 10 кл., п. 36, 37; 11 кл., п. 8

**НМТ** № 12, 19

## Правила диференціювання

У точках, де функції  $f$  і  $g$  диференційовні;  $k$  — число:

$$(f + g)' = f' + g' \quad \text{Д} \quad (f - g)' = f' - g' \quad \text{Д}$$

$$(kf)' = kf' \quad \text{Д} \quad (fg)' = f'g + g'f \quad \text{Д}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \quad \text{Д} \quad (g \neq 0)$$

Приклади:  $(x^3 \cos x)' = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$ ;

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}.$$

Похідна складеної функції ( $g$  диференційовна в точці  $x$ ,  $f$  — у точці  $g(x)$ ):

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Приклади:  $((3x - 7)^6)' = 6(3x - 7)^5 \cdot 3 = 18(3x - 7)^5$ ;

$$(\sin 2x)' = 2 \cos 2x; \quad (e^{-7x})' = -7e^{-7x}.$$

Зокрема,  $(f(kx + b))' = k f'(kx + b)$ .

**Підручник** 10 кл., п. 37; 11 кл., п. 8

**НМТ** № 12, 19

## 3. Застосування похідної

10 кл.

### Зростання і спадання

Якщо для всіх  $x$  із проміжку  $I$  виконується нерівність  $f'(x) > 0$ , то функція  $f$  зростає на цьому проміжку; якщо  $f'(x) < 0$  — спадає на цьому проміжку.

Якщо  $f'(x) = 0$  для всіх  $x \in I$ , то  $f$  — константа на  $I$ .

Проміжки зростання і спадання шукають як проміжки знакосталості  $f'$  (методом інтервалів).

Кінці проміжків, у яких функція неперервна, включають.

Приклад:  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ ,

$f'(x) = 6(x + 1)(x - 2)$ :  $f$  зростає на кожному з проміжків  $(-\infty; -1]$  і  $[2; +\infty)$ , спадає на  $[-1; 2]$ .

**Підручник** 10 кл., п. 39

**НМТ** № 16, 19

### Точки екстремуму

$x_0$  — точка максимуму функції  $f$ , якщо існує окіл точки  $x_0$ , для всіх  $x$  з якого  $f(x_0) \geq f(x)$ ; точка мінімуму — якщо  $f(x_0) \leq f(x)$ . Позначають  $x_{\max}$ ,  $x_{\min}$ . Окіл точки — проміжок  $(a; b)$ , що її містить.

Критичні точки — внутрішні точки області визначення функції, у яких похідна дорівнює нулю або не існує. Кожна точка екстремуму — критична (необхідна умова), але не навпаки: для  $y = x^3$  маємо  $y'(0) = 0$ , а екстремуму немає.

Достатня умова ( $f$  неперервна в критичній точці  $x_0$ ): якщо при переході через  $x_0$  похідна змінює знак з «+» на «-», то  $x_0$  — точка максимуму; з «-» на «+» — точка мінімуму; якщо знак не змінюється, то екстремуму в точці  $x_0$  немає.

Приклад:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x;$$

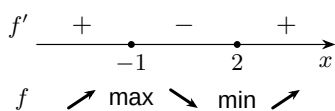
$$x_{\max} = -1, \quad x_{\min} = 2.$$

Значення функції в точках екстремуму:

$$f(-1) = 7, \quad f(2) = -20.$$

**Підручник** 10 кл., п. 40

**НМТ** № 16, 19



## Графік функції і графік її похідної

Якщо диференційовна

функція  $f$  зростає на

проміжку, то на ньому

$f'(x) \geq 0$ ; якщо спадає —

$f'(x) \leq 0$ . У точці

екстремуму, де  $f$

диференційовна,  $f'(x_0) = 0$

(дотична горизонтальна).

За графіком  $y = f'(x)$ : де він

вище від осі абсцис —  $f$

зростає, де нижче — спадає.

Нулі  $f'$ , у яких графік  $f'$

перетинає вісь згори вниз, —

точки максимуму  $f$ ; знизу

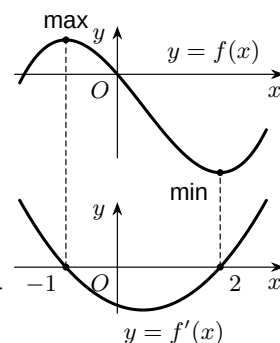
вгору — точки мінімуму.

Якщо графік  $f'$  лише

дотикається до осі (знак не

змінюється), екстремуму

немає.



**Підручник** 10 кл., п. 39, 40

**НМТ** № 16, 19

## Найбільше і найменше значення на відрізку

Неперервна на відрізку  $[a; b]$  функція набуває найбільшого і найменшого значень або на кінцях відрізка, або в точках екстремуму. Схема:

1) знайти критичні точки функції  $f$ , які належать відрізку  $[a; b]$ ;

2) обчислити значення функції в цих точках і на кінцях відрізка;

3) з усіх знайдених значень вибрати найбільше і найменше.

Приклад:  $f(x) = x^3 - 3x$  на

$[0; 2]$ :

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \text{ при } x = \pm 1;$$

відрізку належить  $x = 1$ ;

$$f(0) = 0, \quad f(1) = -2, \quad f(2) = 2.$$

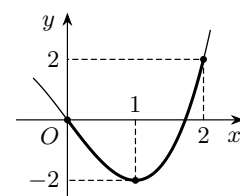
$$\text{Отже, } \max_{[0; 2]} f(x) = f(2) = 2,$$

$$\min_{[0; 2]} f(x) = f(1) = -2.$$

Прикладна задача: шукану величину записують як функцію однієї змінної на проміжку її можливих значень і знаходять найбільше (найменше) значення цієї функції.

**Підручник** 10 кл., п. 41

**НМТ** № 19



## Дослідження функції й побудова графіка

1)  $D(f)$ ; 2) парність; 3) нулі; 4) проміжки знакосталості; 5) проміжки зростання і спадання; 6) точки екстремуму та значення функції в них; 7) інші особливості (періодичність, поведінка поблизу важливих точок тощо). За цими даними будують графік.

**Підручник** 10 кл., п. 43

**НМТ** № 16

**Первісна та її загальний вигляд**

Функцію  $F$  називають первісною функції  $f$  на проміжку  $I$ , якщо для всіх  $x \in I$  виконується рівність  $F'(x) = f(x)$ .

Приклад:  $F(x) = x^2$  — первісна функції  $f(x) = 2x$ , бо  $(x^2)' = 2x$ .

Якщо  $F$  — первісна функції  $f$  на  $I$ , то будь-яку первісну функції  $f$  на  $I$  можна записати у вигляді  $F(x) + C$  (А) ( $C$  — довільне число)

Цей запис називають загальним виглядом первісних. Графіки первісних отримують один з одного паралельним перенесенням уздовж осі ординат.

Первісну, графік якої проходить через точку  $M(x_0; y_0)$ , знаходять з умови  $F(x_0) + C = y_0$ .

Приклад:  $f(x) = 2 \cos x$ ,  $M(\frac{5\pi}{6}; 3)$ :  $2 \sin \frac{5\pi}{6} + C = 3$ ,  $C = 2$ ;  $F(x) = 2 \sin x + 2$ .

Оскільки  $F' = f$ , первісна  $F$  зростає на проміжках, де  $f(x) > 0$ , і спадає на проміжках, де  $f(x) < 0$ .

Закон руху  $s(t)$  — первісна швидкості  $v(t)$ , бо  $s'(t) = v(t)$ .

Підручник 11 кл., п. 9, 10

НМТ № 12, 19

**Таблиця первісних**

| $f(x)$        | $F(x) + C$                              | $f(x)$               | $F(x) + C$              |
|---------------|-----------------------------------------|----------------------|-------------------------|
| 0             | $C$ (А)                                 | $e^x$                | $e^x + C$ (А)           |
| 1             | $x + C$ (А)                             | $a^x$                | $\frac{a^x}{\ln a} + C$ |
| $k$           | $kx + C$                                | $\sin x$             | $-\cos x + C$ (А)       |
| $x^\alpha$    | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ (А) | $\cos x$             | $\sin x + C$ (А)        |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln  x  + C$ (А)                       | $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $\tan x + C$ (А)        |
| $\sqrt[n]{x}$ | $\frac{n}{n+1} \sqrt[n+1]{x} + C$       | $\frac{1}{\sin^2 x}$ | $-\cot x + C$           |

$C$  — довільне число,  $k$  — стала;  $\alpha \neq -1$ ;  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ;  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Формули діють на проміжках з  $D(f)$ : для  $\frac{1}{x}$  і цілих  $\alpha \leq -2$  — на  $(-\infty; 0)$  або  $(0; +\infty)$ , для нецілих  $\alpha$  — на  $(0; +\infty)$ . Корені й дробки записують як степені:  $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ,  $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$ .

Підручник 11 кл., п. 9, 10

НМТ № 12, 19

**Правила знаходження первісних**

Якщо  $F$  і  $G$  — первісні функції  $f$  і  $g$  на проміжку  $I$ ,  $k$  — число, то:

- $F(x) + G(x)$  — первісна функції  $f(x) + g(x)$ ;
- $kF(x)$  — первісна функції  $kf(x)$ ;
- $\frac{1}{k} F(kx + b)$  — первісна функції  $f(kx + b)$ , якщо  $k \neq 0$ .

Приклади:  $\cos(3x + 1) \rightarrow \frac{1}{3} \sin(3x + 1) + C$ ;

$e^{2x} \rightarrow \frac{1}{2} e^{2x} + C$ ;

$(2x - 1)^4 \rightarrow \frac{(2x-1)^5}{10} + C$ .

Первісна добутку (частки) не дорівнює добутку (частці) первісних: спочатку спрощують вираз (розкривають дужки, ділять почленно).

Підручник 11 кл., п. 10

НМТ № 12, 19

**Визначений інтеграл**

Нехай  $F$  — первісна функції  $f$  на проміжку  $I$ , числа  $a$  і  $b$ , де  $a < b$ , належать  $I$ . Різницю  $F(b) - F(a)$  називають визначеним інтегралом функції  $f$  на відрізку  $[a; b]$ :

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{(А)}$$

Це формула Ньютона–Лейбніца ( $F$  — будь-яка первісна). Приклад:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sin \frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2}$$

Зокрема,  $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$ , бо  $f$  — первісна функції  $f'$ .

Підручник 11 кл., п. 11

НМТ № 12

**Властивості визначеного інтеграла**

$k$  — число,  $c \in (a; b)$ :

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

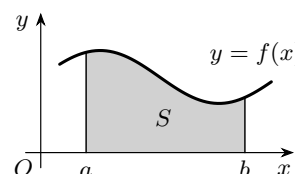
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Підручник 11 кл., п. 11

НМТ № 12

**Площа криволінійної трапеції**

Криволінійна трапеція — фігура, обмежена графіком неперервної й невід'ємної на  $[a; b]$  функції  $f$  і прямими  $y = 0$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ .



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Приклад: фігура, обмежена параболою  $y = 4x - x^2$  і віссю абсцис ( $x = 0$  і  $x = 4$  — нулі функції):

$$S = \int_0^4 (4x - x^2) dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^4 = \frac{32}{3}$$

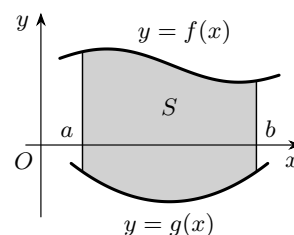
Якщо  $f \geq 0$  і графік  $f$  — ламана, то  $\int_a^b f(x) dx$  — площа фігури під нею (трикутники, трапеції).

Підручник 11 кл., п. 11

НМТ № 12

**Площа фігури між графіками**

Якщо функції  $f$  і  $g$  неперервні на  $[a; b]$  і  $f(x) \geq g(x)$  для всіх  $x \in [a; b]$ , то площа фігури, обмеженої їхніми графіками та прямими  $x = a$ ,  $x = b$ :



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Підручник 11 кл., п. 11

НМТ № 12

### Межі інтегрування

Якщо фігуру обмежено лише графіками, то  $a$  і  $b$  — абсциси точок їх перетину, тобто корені рівняння  $f(x) = g(x)$ .

Приклад:  $y = 2x$  і  $y = x^2$  перетинаються при  $x = 0$  і  $x = 2$ ; на  $[0; 2]$  маємо  $2x \geq x^2$ :

$$S = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

Підручник 11 кл., п. 11

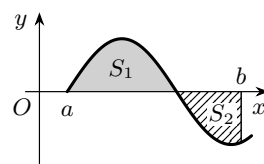
НМТ № 12

### Площа й знак функції

Якщо  $f$  неперервна й  $f \leq 0$  на  $[a; b]$ , то площа фігури, обмеженої графіком  $f$ , віссю абсцис і прямими  $x = a$ ,  $x = b$ :

$$S = - \int_a^b f(x) dx.$$

Якщо  $f$  на  $[a; b]$  змінює знак, то  $\int_a^b f(x) dx = S_1 - S_2$ , а площа всієї фігури  $S = S_1 + S_2$  ( $S_1$  — площа частин над віссю абсцис,  $S_2$  — під нею).



Підручник 11 кл., п. 11

НМТ № 12