

Степені, корені, логарифми

Довідник для підготовки до НМТ з математики



Д — формула є в довідкових матеріалах, які можна відкрити під час НМТ. Формули без значка треба пам'ятати.

Позначення: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ — множини натуральних, цілих і дійсних чисел; $k \in \mathbb{N}$ (тоді $2k$ — парне, $2k + 1$ — непарне число); $D(y)$, $E(y)$ — область визначення й область значень функції; ОДЗ — область допустимих значень змінної; $\Leftrightarrow$ — рівносильний перехід.

1. Степені та степенева функція

8, 10–11 кл.

Степінь з натуральним і цілим показником

$$a^1 = a, \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \quad (\text{Д}) \quad (a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$$

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0 \quad (\text{Д}) \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{Д})$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad (a \neq 0, b \neq 0); \quad \text{вирази } 0^0 \text{ і } 0^{-n} \text{ не мають змісту.}$$

Парний степінь будь-якого числа невід'ємний:

$(-a)^{2k} = a^{2k}$; непарний степінь зберігає знак основи: $(-a)^{2k+1} = -a^{2k+1}$.

Приклади: $2^{-3} = \frac{1}{8}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{4}$; $(-1)^{2027} = -1$; $(-3)^4 = 81$, але $-3^4 = -81$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729				
5^n	5	25	125	625	3125					

Степінь з раціональним і дійсним показником

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (\text{Д}) \quad a > 0, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2$$

$0^{\frac{m}{n}} = 0$ ($m, n \in \mathbb{N}$); вираз $0^{-\frac{1}{2}}$ не має змісту. Для $a < 0$ дробовий степінь не означають: $(-8)^{\frac{1}{3}}$ не має змісту, хоча $\sqrt[3]{-8} = -2$.

$$\text{Приклади: } 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 4; \quad 81^{-0,25} = \frac{1}{\sqrt[4]{81}} = \frac{1}{3};$$

$$\sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}} \quad (a > 0).$$

Для $a > 0$ означено степінь a^x з будь-яким дійсним показником (наприклад, $2^{\sqrt{3}}$); $1^x = 1$; $0^x = 0$ при $x > 0$.

Властивості степенів

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad (\text{Д}) \quad (ab)^x = a^x b^x \quad (\text{Д})$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad (\text{Д}) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \quad (\text{Д})$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad (\text{Д})$$

Для будь-яких дійсних x, y — при $a > 0, b > 0$; для цілих x, y — при $a \neq 0, b \neq 0$.

$$\text{Приклади: } \frac{3^7 \cdot 9^{-2}}{27} = \frac{3^7 \cdot 3^{-4}}{3^3} = 3^0 = 1; \quad a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}};$$

$$(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^2 = 4.$$

Порівняння степенів

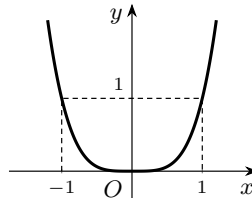
Однакові основи: при $a > 1$ більшому показнику відповідає більший степінь, при $0 < a < 1$ — менший: $2^{\sqrt{3}} < 2^{1,8}$; $0,3^{-2} > 0,3^{-1}$; $0,3^{-\pi} > 0,3^0 = 1$.

Однакові показники ($0 < a < b$): $a^r < b^r$ при $r > 0$; $a^r > b^r$ при $r < 0$.

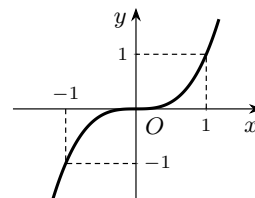
Інакше — до спільного показника:

$$(2^{0,3})^{10} = 8 < 9 = (3^{0,2})^{10}, \text{ тож } 2^{0,3} < 3^{0,2}.$$

Степенева функція $y = x^n, n \in \mathbb{N}$



n — парне



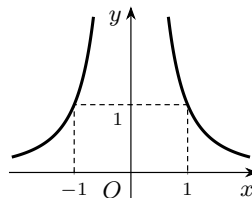
n — непарне, $n > 1$

$D(y) = \mathbb{R}$; нуль функції $x = 0$; графік проходить через точку $(1; 1)$.

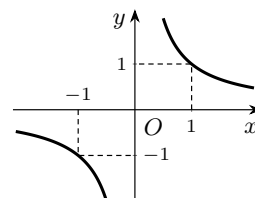
• n парне: $E(y) = [0; +\infty)$; функція парна; спадає на $(-\infty; 0]$, зростає на $[0; +\infty)$.

• n непарне: $E(y) = \mathbb{R}$; функція непарна; зростає. При $n = 1$ — пряма $y = x$.

Степенева функція $y = x^{-n}, n \in \mathbb{N}$



n — парне



n — непарне

$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; нулів немає; осі координат — асимптоти графіка; графік проходить через точку $(1; 1)$.

• n парне: $E(y) = (0; +\infty)$; функція парна; зростає на $(-\infty; 0)$, спадає на $(0; +\infty)$.

• n непарне: $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; функція непарна; спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ (але не на всій області визначення).

$y = x^0$: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $E(y) = \{1\}$ — пряма $y = 1$ без точки $(0; 1)$.

2. Корені n -го степеня

10 кл.

Корінь n -го степеня

Коренем n -го степеня з числа a ($n \in \mathbb{N}, n > 1$) називають таке число, n -й степінь якого дорівнює a . Арифметичним коренем n -го степеня з невід'ємного числа a називають таке невід'ємне число, n -й степінь якого дорівнює a . Позначення: $\sqrt[n]{a}$.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b \geq 0 \text{ і } b^n = a \quad (a \geq 0)$$

• n непарне: корінь існує з будь-якого числа, і тільки один: $\sqrt[3]{-8} = -2$; $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$.

• n парне: при $a < 0$ кореня не існує; при $a = 0$ він дорівнює 0; при $a > 0$ їх два — протилежні числа $\sqrt[n]{a}$ і $-\sqrt[n]{a}$. Запис $\sqrt[2k]{a}$ означає лише арифметичний корінь: $\sqrt[4]{16} = 2$.

$(\sqrt[n]{a})^n = a$ ($a \geq 0$; для непарного n — будь-яке a); $\sqrt[n]{a} \geq 0$ при $a \geq 0$.

Властивості коренів

Для $a \geq 0, b \geq 0$ і $n, k \in \mathbb{N}, n > 1$:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b > 0)$$
$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k} \quad \sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$$
$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a} \quad (k > 1)$$

Для будь-якого a : $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$, $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$.

Якщо $a \leq 0$ і $b \leq 0$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{-a} \cdot \sqrt[n]{-b}$.

Приклади: $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[6]{(-2)^6} = |-2| = 2$;

$$\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{|a|}; \quad \sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1.$$

Перетворення виразів з коренями

Винесення множника з-під знака кореня:

$$\sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b} \quad (a \geq 0, b \geq 0); \quad \sqrt[n]{a^2 b} = |a| \sqrt[n]{b} \quad (b \geq 0);$$
$$\sqrt[3]{-54} = -3 \sqrt[3]{2}.$$

Внесення множника під знак кореня: $a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$
($a \geq 0, b \geq 0$); при $a < 0$: $a \sqrt[n]{b} = -\sqrt[n]{a^n b}$;
 $-2 \sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{48}$.

Звільнення від ірраціональності в знаменнику:

$$\frac{c}{\sqrt{a}} = \frac{c\sqrt{a}}{a}, \quad \frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$$

($a > 0, b \geq 0, a \neq b$; множимо на спряжений вираз,
бо $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a-b$).

Скорочення дробів ($a \geq 0, b \geq 0, a+b > 0$):

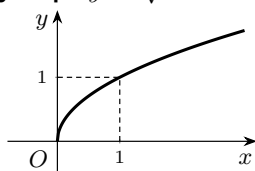
$$\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}.$$

Повний квадрат під коренем:

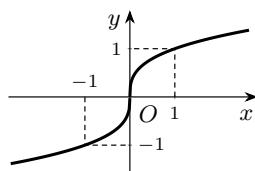
$$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1.$$

Порівняння: якщо $0 \leq a < b$, то $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$. Корені з різними показниками зводимо до спільного показника: $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9} > \sqrt[6]{8} = \sqrt[3]{2}$.

Функція $y = \sqrt[n]{x}$



n — парне



n — непарне

• n парне: $D(y) = E(y) = [0; +\infty)$; функція ні парна, ні непарна; зростає.

• n непарне: $D(y) = E(y) = \mathbb{R}$; функція непарна; зростає.

Функція $y = \sqrt[n]{x}$ обернена до $y = x^n$ (для парного n — до $y = x^n, x \geq 0$); їхні графіки симетричні відносно прямої $y = x$.

Рівняння $x^n = a$: n непарне — $x = \sqrt[n]{a}$; n парне і $a > 0$ — $x = \pm \sqrt[n]{a}$; $a = 0$ — $x = 0$; n парне і $a < 0$ — коренів немає.

Функція $y = x^{\frac{m}{n}}$ ($\frac{m}{n}$ — нескоротний дріб, $n > 1$):

$D(y) = [0; +\infty)$, якщо $\frac{m}{n} > 0$; $D(y) = (0; +\infty)$, якщо $\frac{m}{n} < 0$.

3. Ірраціональні рівняння й нерівності

10 кл.

Ірраціональні рівняння: піднесення до степеня

Ірраціональними називають рівняння, які містять змінну під знаком кореня. Основний метод — піднесення обох частин рівняння до степеня.

• До непарного степеня — отримуємо рівняння, рівносильне даному:

$$\sqrt[3]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = (g(x))^3$$

• До парного степеня — отримуємо рівняння-наслідок: можуть з'явитися сторонні корені. Їх відкидають перевіркою або одразу переходять до рівносильної системи:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

У другій системі замість $f(x) \geq 0$ можна взяти $g(x) \geq 0$ — ту нерівність, яку легше розв'язати.

Приклад: $\sqrt{4+3x} = x$; $4+3x = x^2$; $x_1 = -1, x_2 = 4$.

Перевірка: -1 — сторонній корінь. Відповідь: 4.

Ірраціональні рівняння: інші прийоми

Спершу корисно знайти ОДЗ: рівняння

$\sqrt{x-3} = \sqrt{1-x}$ коренів не має, бо умови $x \geq 3$ і $x \leq 1$ несумісні.

Якщо на множині M обидві частини рівняння невід'ємні, то піднесення до квадрата дає рівняння, рівносильне даному на M .

Заміна змінної: $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$; $t = \sqrt{x} \geq 0$;

$t^2 - 5t + 6 = 0$; $t = 2$ або $t = 3$; $x = 4$ або $x = 9$.

Добуток дорівнює нулю:

$$g(x)\sqrt{f(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ x \in D(g); \\ g(x) = 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Наприклад, $(x+2)\sqrt{x-1} = 0$ має лише корінь 1.

Ірраціональні нерівності

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < (g(x))^2, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases}$$

Нестрогі нерівності — так само, лише знак між f і g (чи $(g(x))^2$) нестрогий, а в другій схемі $g(x) \geq 0$.

Найпростіші ($a > 0$): $\sqrt{f(x)} < a \Leftrightarrow 0 \leq f(x) < a^2$;

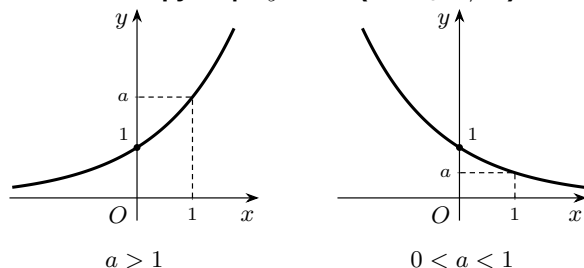
$$\sqrt{f(x)} > a \Leftrightarrow f(x) > a^2.$$

Приклад: $\sqrt{x-2} < 1$; $0 \leq x-2 < 1$; $x \in [2; 3)$.

4. Показникова функція. Логарифми

11 кл.

Показникова функція $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)



$D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = (0; +\infty)$; нулів немає ($a^x > 0$); графік проходить через точки $(0; 1)$ і $(1; a)$; пряма $y = 0$ — асимптота.

- $a > 1$: функція зростає; $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$.
- $0 < a < 1$: функція спадає; $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$.

$e = 2,71828 \dots$ — ірраціональне число; $y = e^x$ — експонента (зростає, бо $e > 1$).

Графік $y = a^{x-m} + n$ отримують з графіка $y = a^x$ паралельним перенесенням на вектор $(m; n)$; його асимптота — пряма $y = n$.

Означення логарифма

Логарифмом додатного числа b з основою a , де $a > 0$ і $a \neq 1$, називають показник степеня, до якого потрібно піднести число a , щоб отримати число b :

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0)$$

$a^{\log_a b} = b$ [Д] — основна логарифмічна тотожність

$$\log_a a = 1 \quad [Д] \quad \log_a 1 = 0 \quad [Д] \quad \log_a a^c = c$$

$\lg b = \log_{10} b$ — десятковий логарифм;

$\ln b = \log_e b$ — натуральний логарифм ($e \approx 2,718$).

Приклади: $\log_2 8 = 3$; $\log_3 \frac{1}{9} = -2$; $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$;

$$\lg 0,001 = -3; \ln e = 1; 7^{\log_7 3} = 3;$$

$$10^{2+\lg 7} = 100 \cdot 7 = 700.$$

Вираз $\log_a b$ не має змісту, якщо $b \leq 0$, $a \leq 0$ або $a = 1$.

Властивості логарифмів

Умови: $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$.

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c \quad [Д]$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \quad [Д]$$

$$\log_a b^n = n \log_a b \quad [Д] \quad (n \text{ — будь-яке число})$$

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b \quad [Д] \quad (k \text{ — будь-яке число, } k \neq 0)$$

$$\text{Перехід до іншої основи (} c \neq 1 \text{): } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a};$$

$$\text{зокрема } \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (b \neq 1).$$

$$\text{Наслідки: } \log_{a^k} b^n = \frac{n}{k} \log_a b; \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c \quad (b \neq 1).$$

$$\text{Увага: } \log_a x^2 = 2 \log_a |x| \quad (x \neq 0);$$

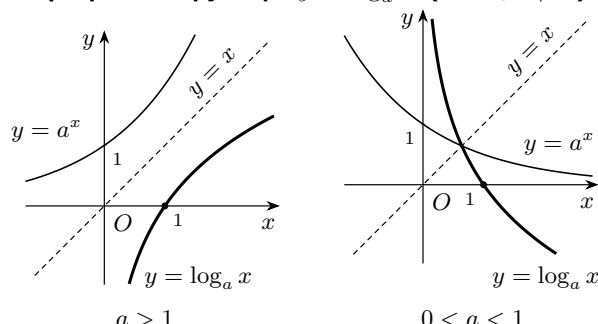
$$\log_a (xy) = \log_a |x| + \log_a |y| \quad (xy > 0).$$

$$\text{Приклади: } \log_6 4 + \log_6 9 = \log_6 36 = 2;$$

$$\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15 = \log_2 16 = 4; \log_{\sqrt{3}} 9 = 4;$$

$$\log_2 3 \cdot \log_3 8 = \log_2 8 = 3; 49^{\log_7 2} = (7^{\log_7 2})^2 = 4.$$

Логарифмічна функція $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)



$D(y) = (0; +\infty)$, $E(y) = \mathbb{R}$; нуль функції $x = 1$; пряма $x = 0$ — асимптота.

- $a > 1$: функція зростає; $y < 0$ на $(0; 1)$, $y > 0$ на $(1; +\infty)$.
- $0 < a < 1$: функція спадає; $y > 0$ на $(0; 1)$, $y < 0$ на $(1; +\infty)$.

$y = \log_a x$ і $y = a^x$ — взаємно обернені функції, їхні графіки симетричні відносно прямої $y = x$:

$$\log_a a^x = x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a^{\log_a x} = x \quad [Д] \quad (x > 0).$$

Порівняння: $\log_2 6 < \log_2 7$; $\log_{0,2} 6 > \log_{0,2} 7$. Знак:

$\log_a b > 0$, якщо a і b обидва більші за 1 або обидва менші від 1, інакше $\log_a b < 0$ ($b \neq 1$). Різні

основи — через «опорні» числа: $\log_2 3 > 1 > \log_3 2$;

$$2 < \log_3 20 < 3, \text{ бо } 3^2 < 20 < 3^3.$$

Графік $y = \log_a(x - m) + n$: $D(y) = (m; +\infty)$,

асимптота — пряма $x = m$.

5. Показникові та логарифмічні рівняння й нерівності

11 кл.

Показникові рівняння

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad (a > 0, a \neq 1)$$

Найпростіше рівняння $a^x = b$: при $b \leq 0$ коренів немає; при $b > 0$ — єдиний корінь $x = \log_a b$

(наприклад, $3^x = 7$, $x = \log_3 7$).

$$1) \text{ Зведення до однієї основи: } 0,125^x = 128;$$

$$2^{-3x} = 2^7; x = -\frac{7}{3}.$$

$$2) \text{ Винесення за дужки степеня з меншим показником: } 3^{x+1} - 3^{x-1} = 24; 3^{x-1}(3^2 - 1) = 24;$$

$$3^{x-1} = 3; x = 2.$$

$$3) \text{ Заміна } t = a^x, t > 0: 4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0;$$

$$t^2 - 3t - 4 = 0; t = 4 \quad (t = -1 \text{ не підходить}); 2^x = 4;$$

$$x = 2.$$

Показникові рівняння: інші прийоми

Однорідні (a^{2x} , $a^x b^x$, b^{2x}): ділимо на $b^{2x} > 0$ і робимо заміну $t = (\frac{a}{b})^x$. Зокрема, $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ ($a, b > 0$, $a \neq b$) $\Leftrightarrow f(x) = 0$.

$$\text{Логарифмування: } a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow$$

$$f(x) \lg a = g(x) \lg b \quad (a > 0, b > 0).$$

Якщо одна частина рівняння зростає, а друга спадає (або стала), то рівняння має не більше ніж один корінь — його можна підібрати: $2^x = 3 - x$; $x = 1$.

Параметр: після заміни $t = 2^x$ кожному $t > 0$ відповідає рівно один корінь $x = \log_2 t$, а $t \leq 0$ — жодного. Наприклад, $4^x - (a + 3) \cdot 2^x + 4a - 4 = 0$: $t = 4$ або $t = a - 1$; корінь $x = 2$ є завжди, тож він єдиний, якщо $a - 1 \leq 0$ або $a - 1 = 4$, тобто при $a \leq 1$ або $a = 5$.

Показникові нерівності

$a > 1$: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ (знак нерівності зберігається)

$0 < a < 1$: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ (знак змінюється)

Приклад: $(\frac{1}{3})^x > 9$; $(\frac{1}{3})^x > (\frac{1}{3})^{-2}$; $x < -2$. Інший: $2^x > 5$; $x > \log_2 5$.

Оскільки $a^{f(x)} > 0$, нерівність $a^{f(x)} > b$ при $b \leq 0$ виконується для всіх x з ОДЗ, а $a^{f(x)} < b$ при $b \leq 0$ розв'язків не має.

Заміна $t = a^x$, $t > 0$: $4^x - 2^x - 2 < 0$; $t^2 - t - 2 < 0$; $-1 < t < 2$; $0 < 2^x < 2$; $x < 1$.

Логарифмічні рівняння

Найпростіше рівняння $\log_a x = b$ має єдиний корінь $x = a^b$ при будь-якому b ; $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$.

Рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ($a > 0$, $a \neq 1$) рівносильне кожній із систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Заміна $\log_a f + \log_a g$ на $\log_a(fg)$ розширює ОДЗ — можуть з'явитися сторонні корені: спершу знаходимо ОДЗ або перевіряємо корені. Навпаки, заміна $\log_a f^2$ на $2 \log_a f$ звужує ОДЗ — можна втратити корені; правильно $2 \log_a |f|$.

Приклад: $\log_3(2x-1) + \log_3(x-2) = 3$; ОДЗ: $x > 2$; $(2x-1)(x-2) = 27$; $x = 5$ або $x = -\frac{5}{2}$ (не входить до ОДЗ). Відповідь: 5.

Зведення до однієї основи: $\log_2 x + \log_4 x = 3$; $\log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x = 3$; $\log_2 x = 2$; $x = 4$.

Логарифмування й заміна: $x^{\lg x} = 100x$;

$\lg^2 x = 2 + \lg x$; $t = \lg x$: $t^2 - t - 2 = 0$; $x = 100$ або $x = 0,1$.

Якщо змінна в основі, то $\log_{g(x)} f(x)$ має зміст при $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $g(x) \neq 1$.

Логарифмічні нерівності

Нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі:

$$\begin{array}{ll} \text{якщо } a > 1, & \text{якщо } 0 < a < 1, \\ \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0; \end{cases} & \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases} \end{array}$$

При $a > 1$ знак нерівності зберігається, при $0 < a < 1$ — змінюється; додатною вимагаємо меншу з функцій.

Найпростіша $\log_a x > b$: $x > a^b$, якщо $a > 1$;

$0 < x < a^b$, якщо $0 < a < 1$.

Приклад: $\log_{0,5}(x-1) \geq -2$; $\log_{0,5}(x-1) \geq \log_{0,5} 4$; $0 < x-1 \leq 4$; $x \in (1; 5]$.

Системи рівнянь

Кожне рівняння системи спрощуємо за властивостями степенів і логарифмів до алгебраїчного; для логарифмів урахуємо ОДЗ.

$$\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = 16, \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg x + \lg y = 1, \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 10, \ x > 0, \ y > 0, \\ x = y + 3; \end{cases}$$

$y(y+3) = 10$; $y = 2$ ($y = -5$ не входить до ОДЗ); $x = 5$. Розв'язок (5; 2).

ОДЗ: коли вираз має зміст

- дріб $\frac{f}{g}$: $g \neq 0$;
- корінь парного степеня $\sqrt[2k]{f}$: $f \geq 0$ (корінь непарного степеня — будь-яке f);
- логарифм $\log_a f$: $f > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- степінь з дробовим показником $f^{\frac{m}{n}}$: $f > 0$ ($f \geq 0$, якщо $\frac{m}{n} > 0$).

Приклад: $y = \sqrt{x+1} + \lg(3-x)$: $x+1 \geq 0$ і $3-x > 0$; $D(y) = [-1; 3)$.