

Стереометрія: формули та властивості



Довідник для підготовки до НМТ з математики

Д — формула є в довідкових матеріалах, які можна відкрити під час НМТ. Формули без значка треба пам'ятати.
Позначення (як у підручнику): h — висота, r — радіус, l — твірна; $S_{\text{осн}}$, $P_{\text{осн}}$ — площа й периметр основи; S_b , S_n — площі бічної та повної поверхонь; V — об'єм. У довідці НМТ: H , R , L ; апофема — m .

1. Прямі та площини в просторі

10 кл.

Аксиоми стереометрії

A1. У кожній площині простору виконуються всі аксиоми планіметрії.

A2. Через три точки, що не лежать на одній прямій, проходить площина, і до того ж тільки одна.

A3. Якщо дві точки прямої належать площині, то й уся пряма належить цій площині.

A4. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій.

Площину задають: три точки, що не лежать на одній прямій; пряма й точка поза нею; дві прямі, що перетинаються; дві паралельні прямі.

Перерізи многогранників

Сторони перерізу лежать на гранях многогранника.

- Дві точки перерізу, що лежать в одній грані, сполучаємо відрізком.
- Паралельні грані площина перетинає по паралельних відрізках.
- Переріз тетраедра — трикутник або чотирикутник, куба — від трикутника до шестикутника.

Взаємне розміщення двох прямих

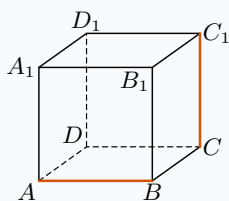
Дві прямі в просторі:

- перетинаються — мають одну спільну точку;
- паралельні — лежать в одній площині й не перетинаються;
- мимобіжні — не лежать в одній площині.

У кубі: $AB \parallel D_1C_1$; AB і BB_1 перетинаються; AB і CC_1 — мимобіжні.

Ознака мимобіжних прямих: якщо одна з двох прямих лежить у площині, а друга перетинає цю площину в точці, яка не належить першій прямій, то ці прямі мимобіжні (CC_1 перетинає площину ABC у точці $C \notin AB$).

Через точку поза прямою проходить тільки одна пряма, паралельна даній. Дві прямі, паралельні третій, паралельні між собою.



Паралельність прямої та площини

Пряма лежить у площині, перетинає її (одна спільна точка) або паралельна їй (немає спільних точок).

Ознака: якщо пряма, яка не лежить у площині, паралельна якій-небудь прямій цієї площини, то вона паралельна й самій площині.

Якщо площина проходить через пряму, паралельну другій площині, і перетинає цю площину, то пряма перетину паралельна даній прямій.

Паралельність площин

Дві площини або перетинаються по прямій, або паралельні (не мають спільних точок).

Ознака: якщо дві прямі однієї площини, що перетинаються, паралельні відповідно двом прямим другої площини, то ці площини паралельні. Прямі перетину двох паралельних площин третьою площиною паралельні. Відрізки паралельних прямих між паралельними площинами рівні.

Паралельне проєктування

Зображення фігури — її паралельна проєкція. Для прямих, не паралельних напрямку проєктування, паралельні прямі зображуються паралельними прямими (або однією прямою), а відношення відрізків однієї прямої або паралельних прямих зберігається: середина відрізка — середина, паралелограм — паралелограм (або відрізок). Кути й довжини можуть спотворюватися.

2. Перпендикулярність, кути й відстані

10 кл.

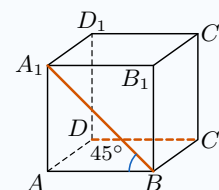
Кут між прямими

Кут між прямими, що перетинаються, — той з утворених кутів, що не більший за 90° ; між паралельними прямими — 0° .

Між мимобіжними — кут між прямими, які перетинаються й відповідно паралельні даним.

У кубі кут між мимобіжними A_1B і CD дорівнює куту між A_1B і AB (бо $CD \parallel AB$), тобто 45° .

Перпендикулярними бувають і мимобіжні прямі: $AB \perp CC_1$.

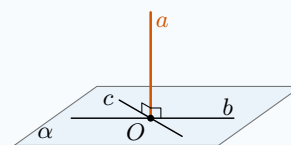


Перпендикулярність прямої та площини

Пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до кожної прямої цієї площини.

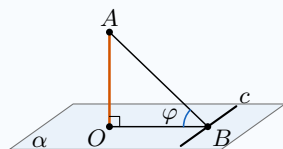
Ознака: якщо $a \perp b$ і $a \perp c$, де b і c — прямі площини α , що перетинаються, то $a \perp \alpha$.

Дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні. Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то й друга перпендикулярна до неї.



Перпендикуляр, похила, кут між прямою та площиною

$AO \perp \alpha$: AO — перпендикуляр, AB — похила, OB — проєкція похилої; $AO < AB$.



Похилі, проведені з однієї точки: рівні похилі мають рівні проєкції, більша похила — більшу проєкцію (і навпаки).

Кут між прямою та площиною — кут між прямою та її проєкцією на площину: $\varphi = \angle ABO$,

$$\sin \varphi = \frac{AO}{AB}, \quad \cos \varphi = \frac{OB}{AB}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{AO}{OB}$$

Якщо пряма паралельна площині або лежить у ній, кут дорівнює 0° ; якщо перпендикулярна — 90° .

Теорема про три перпендикуляри: пряма c , що лежить у площині, перпендикулярна до похилої тоді й тільки тоді, коли вона перпендикулярна до проєкції похилої: $c \perp OB \Leftrightarrow c \perp AB$.

Двогранний кут, кут між площинами

Двогранний кут з ребром

l і гранями α, β .

Лінійний кут —

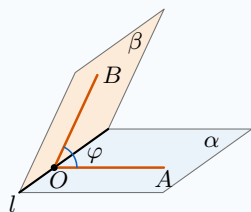
$$\angle AOB = \varphi: O \in l,$$

$$OA \subset \alpha, OB \subset \beta,$$

$$OA \perp l, OB \perp l.$$

Величина двогранного кута — величина його лінійного кута.

Кут між площинами, що перетинаються, — той з утворених двогранних кутів, який не більший за 90° ; між паралельними площинами — 0° .



Перпендикулярні площини; площа проєкції

Площини перпендикулярні, якщо кут між ними 90° .

Ознака: якщо площина проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то ці площини перпендикулярні.

Пряма, проведена в одній з двох перпендикулярних площин перпендикулярно до прямої перетину площин, перпендикулярна до другої площини.

Площа ортогональної проєкції многокутника:

$$S_{\text{пр}} = S \cos \varphi \quad (\varphi \text{ — кут між площиною многокутника і площиною проєкції}).$$

Відстані

Від точки до площини — довжина перпендикуляра, опущеного з точки на площину. Від прямої до паралельної їй площини — відстань від будь-якої точки прямої до площини; між паралельними площинами — від будь-якої точки однієї площини до другої.

Між мимобіжними прямими — довжина їхнього спільного перпендикуляра (відрізка, перпендикулярного до обох прямих, з кінцями на них); вона дорівнює відстані між паралельними площинами, що містять ці прямі. У кубі відстань між AA_1 і CD дорівнює ребру.

3. Многогранники

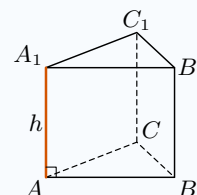
11 кл.

Призма

$$S_6 = P_{\text{осн}} \cdot h \quad \text{(пряма призма)}$$

$$S_{\text{п}} = S_6 + 2S_{\text{осн}}$$

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h \quad \text{(А)}$$



Пряма призма: бічні ребра перпендикулярні до основ, бічні грані — прямокутники, висота h дорівнює бічному ребру; бічна поверхня розгортається в прямокутник $P_{\text{осн}} \times h$. Правильна призма — пряма, в основі якої правильний многокутник.

n -кутна призма має $2n$ вершин, $3n$ ребер і $n + 2$ грані.

Паралелепіпед і куб

Прямокутний паралелепіпед

з вимірами $a, b, c; d$ —

діагональ:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

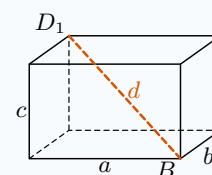
$$V = abc$$

$$S_{\text{п}} = 2(ab + bc + ac)$$

Куб з ребром a : $d = a\sqrt{3}$, $V = a^3$, $S_{\text{п}} = 6a^2$;

діагональ грані — $a\sqrt{2}$.

Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці й діляться нею навпіл.



Піраміда

Правильна піраміда: в

основі — правильний

многокутник, вершина S

проєктується в його центр

O ; $SK = d$ — апофема

(висота бічної грані,

проведена з вершини S).

$$S_6 = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot d \quad \text{(А)}$$

$$S_{\text{п}} = S_6 + S_{\text{осн}}$$

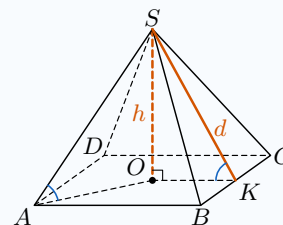
$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h \quad \text{(А)} \quad \text{(будь-яка піраміда)}$$

У правильній піраміді: $d^2 = h^2 + OK^2$, де OK — радіус кола, вписаного в основу; бічне ребро $SA^2 = h^2 + OA^2$, де OA — радіус описаного кола.

$\angle SKO$ — кут між бічною гранню й основою,

$\angle SAO$ — кут між бічним ребром і основою.

n -кутна піраміда має $n + 1$ вершину, $2n$ ребер і $n + 1$ грань. У довідці НМТ апофему позначено m .



Куди проєктується вершина піраміди

Якщо бічні ребра піраміди рівні (або однаково нахилені до основи), вершина проєктується в центр кола, описаного навколо основи.

Якщо всі двогранні кути опуклої піраміди при ребрах основи дорівнюють α , вершина проєктується в центр вписаного кола, і

$$S_6 = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \alpha}$$

Переріз, паралельний основі; зрізана піраміда

Площина, паралельна основі піраміди, відтинає піраміду, подібну даній; коефіцієнт подібності k дорівнює відношенню їхніх висот. Площа перерізу дорівнює $k^2 S_{\text{осн}}$, а об'єм відтятої піраміди становить k^3 від об'єму даної.

Друга частина — зрізана піраміда; S_1, S_2 — площі її основ, h — висота зрізаної піраміди:

$$V = \frac{1}{3} h (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$

Правильна зрізана піраміда (P, p — периметри основ, d — апофема): $S_6 = \frac{1}{2} (P + p) \cdot d$.

4. Тіла обертання

11 кл.

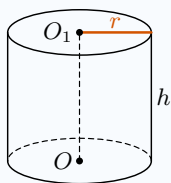
Циліндр

r — радіус основи, h — висота:

$$S_6 = 2\pi r h \quad \text{Д}$$

$$S_{\text{п}} = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

$$V = \pi r^2 h \quad \text{Д}$$



Осьовий переріз — прямокутник зі сторонами $2r$ і h ; переріз площиною, паралельною основам, — круг радіуса r . Розгортка бічної поверхні — прямокутник $2\pi r \times h$.

Конус

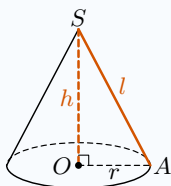
r — радіус основи, h — висота, l — твірна:

$$l^2 = r^2 + h^2$$

$$S_6 = \pi r l \quad \text{Д}$$

$$S_{\text{п}} = \pi r l + \pi r^2$$

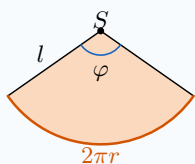
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad \text{Д}$$



$\angle SAO$ — кут між твірною та основою. Осьовий переріз — рівнобедрений трикутник з бічними сторонами l і основою $2r$; переріз площиною, паралельною основі, — круг.

Розгортка бічної поверхні — круговий сектор радіуса l з дугою завдовжки $2\pi r$; його кут

$$\varphi = \frac{360^\circ \cdot r}{l}$$



Зрізаний конус (r_1, r_2 — радіуси основ, l — його твірна, h — висота):

$$S_6 = \pi (r_1 + r_2) l, \quad V = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

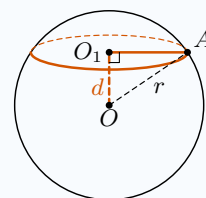
Куля і сфера

r — радіус кулі, $d = OO_1$ — відстань від центра до площини. Якщо $d < r$, переріз кулі площиною — круг із центром O_1 :

$$O_1 A = \sqrt{r^2 - d^2}$$

$$S = 4\pi r^2 \quad \text{Д} \quad \text{— площа сфери}$$

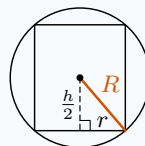
$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \text{Д} \quad \text{— об'єм кулі}$$



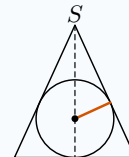
Площина, що проходить через центр, перетинає кулю по великому колу радіуса r . Дотична площина до сфери перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.

Вписані й описані тіла

Призму вписано в циліндр, якщо її основи вписано в основи циліндра; піраміду вписано в конус, якщо її основу вписано в основу конуса, а вершини збігаються. Тоді висоти рівні, а радіус циліндра (конуса) дорівнює радіусу кола, описаного навколо основи многогранника.



$$R^2 = r^2 + \frac{h^2}{4}$$



вписана сфера

Осьові перерізи: ліворуч — циліндра з описаною сферою, праворуч — конуса з вписаною сферою.

Навколо будь-якого циліндра й конуса можна описати сферу; її радіус R дорівнює радіусу кола, описаного навколо осьового перерізу. У будь-який конус можна вписати сферу; її радіус дорівнює радіусу кола, вписаного в осьовий переріз. Вписати сферу в циліндр можна, якщо $h = 2r$ (осьовий переріз — квадрат).

Навколо прямокутного паралелепіпеда можна описати сферу: $R = \frac{d}{2}$ (d — його діагональ); у куб з ребром a можна вписати сферу радіуса $\frac{a}{2}$. Навколо правильних піраміди й призми теж можна описати сферу.

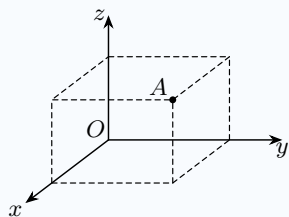
5. Координати й вектори в просторі

10 кл.

Координати точки

$A(x; y; z)$: x — абсциса,
 y — ордината, z —
апліката.

Точки осі x : $(x; 0; 0)$;
площини xy : $(x; y; 0)$.



$A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad \text{Д}$$

Середина $M(x_0; y_0; z_0)$ відрізка AB :

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad \text{Д}$$

Точка, симетрична $A(x; y; z)$ відносно: початку
координат — $(-x; -y; -z)$; площини xy —
 $(x; y; -z)$; осі z — $(-x; -y; z)$ (для інших площин і
осей — аналогічно).

Відстань від $A(x; y; z)$ до площини xy дорівнює $|z|$,
до осі z — $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Сфера з центром $(a; b; c)$ і радіусом r :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Вектори

$$\vec{AB} (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) \quad \text{Д}$$

$$\vec{a} (a_1; a_2; a_3): |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad \text{Д}$$

$$\vec{a} + \vec{b} (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3), \quad k\vec{a} (ka_1; ka_2; ka_3)$$

Якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$, то $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні $\Leftrightarrow \vec{b} = k\vec{a}$, тобто
 $b_1 = ka_1, b_2 = ka_2, b_3 = ka_3$. Рівні вектори мають
рівні координати.

Правило паралелепіпеда: $\vec{AC_1} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1}$
($ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — паралелепіпед).

Скалярний добуток (φ — кут між векторами):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi \quad \text{Д} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad \text{Д}$$

$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$. Для ненульових векторів:

$$\cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Кут φ між прямими AB і CD (з модулем, бо цей кут
не більший за 90°):

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{CD}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{CD}|}$$