

Тригонометрія

Довідник для підготовки до НМТ з математики



Д — формула є в довідкових матеріалах, які можна відкрити під час НМТ. Формули без значка треба пам'ятати.

Позначення: n, k — довільні цілі числа ($n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$); аргументи тригонометричних функцій — у радіанах (градуси позначено знаком $^\circ$); $D(y), E(y)$ — область визначення й область значень функції; T — період.

1. Тригонометричні функції числового аргументу

10 кл.

Радіанна міра кута

Кут в 1 радіан — центральний кут, що спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу кола.

$$\pi \text{ рад} = 180^\circ, \quad 1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57^\circ$$

Градуси переводять у радіани множенням на $\frac{\pi}{180}$, радіани в градуси — множенням на $\frac{180}{\pi}$:

$135^\circ = 135 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6} = \frac{5 \cdot 180^\circ}{6} = 150^\circ$. «Рад» зазвичай не пишуть: $\sin 2$ — синус кута 2 радіани.

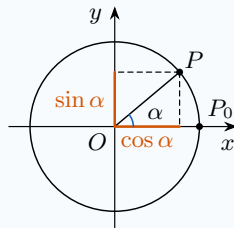
$$30^\circ = \frac{\pi}{6}, \quad 45^\circ = \frac{\pi}{4}, \quad 60^\circ = \frac{\pi}{3}, \quad 90^\circ = \frac{\pi}{2}, \quad 120^\circ = \frac{2\pi}{3}, \quad 135^\circ = \frac{3\pi}{4}, \quad 150^\circ = \frac{5\pi}{6}, \quad 270^\circ = \frac{3\pi}{2}.$$

Довжина дуги кола радіуса R , яка містить α рад: $l = \alpha R$.

Синус, косинус, тангенс і котангенс

Одиничне коло — коло радіуса 1 із центром $O(0; 0)$.

Точку $P_0(1; 0)$ повертають навколо O на кут α (проти годинникової стрілки — $\alpha > 0$, за стрілкою — $\alpha < 0$) і отримують точку $P(x; y)$ (у довідці НМТ — M):



$$\sin \alpha = y, \quad \cos \alpha = x \quad \text{Д}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{Д} \quad (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq \pi k)$$

$-1 \leq \sin \alpha \leq 1$, $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$; $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$ набувають будь-яких значень. Кутам α і $\alpha + 2\pi n$ відповідає та сама точка P .

Значення для деяких кутів

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

«—» — не існує. Рядка ctg у довідці НМТ немає:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (\alpha \neq \frac{\pi k}{2}); \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2} = 0.$$

Інші кути — за формулами зведення:

$$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Одиничне коло: основні кути

Точка кута α має

координати

$$(\cos \alpha; \sin \alpha):$$

$$\frac{\pi}{6} \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right),$$

$$\frac{\pi}{4} \rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\frac{\pi}{3} \rightarrow \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Точки кутів α і $\pi - \alpha$

симетричні відносно

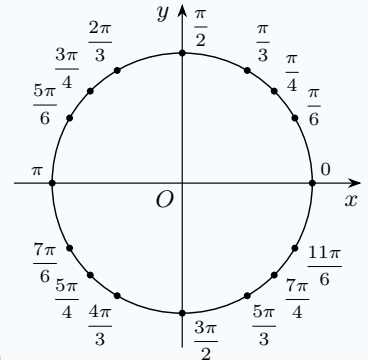
осі y (рівні синуси), α і

$-\alpha$ — відносно осі x

(рівні косинуси), α і

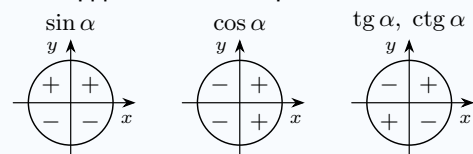
$\pi + \alpha$ — відносно точки

O (рівні тангенс).



Знаки, парність, періодичність

Знаки за координатними чвертями:



Парність: $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ (парна функція);

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha \text{ (непарні)}.$$

Періодичність: $\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin \alpha$,

$$\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos \alpha, \quad \operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Функцію f називають періодичною з періодом

$T \neq 0$, якщо для кожного $x \in D(f)$:

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Головний (найменший додатний) період: 2π — для $\sin$ і $\cos$, π — для tg і ctg .

Приклад:

$$\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right) = -\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Основні співвідношення

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ Д — для будь-якого α

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \text{Д} \quad (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\alpha \neq \pi k)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1 \quad (\alpha \neq \frac{\pi k}{2})$$

Знак у формулах $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$,

$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ вибирають за чвертю, у якій лежить α .

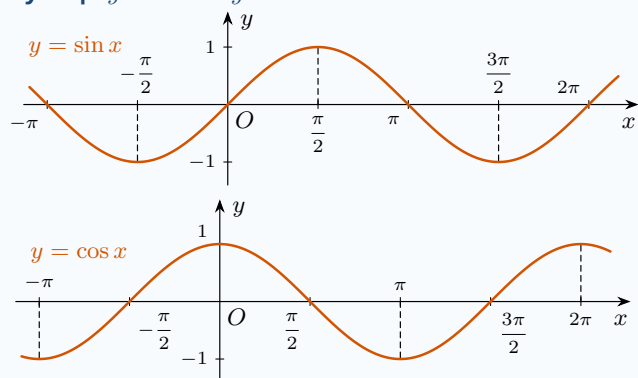
Приклад: $\sin \alpha = -\frac{7}{25}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ (III чверть, тому

$$\cos \alpha < 0): \cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{49}{625}} = -\frac{24}{25}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}.$$

2. Графіки й властивості функцій

10 кл.

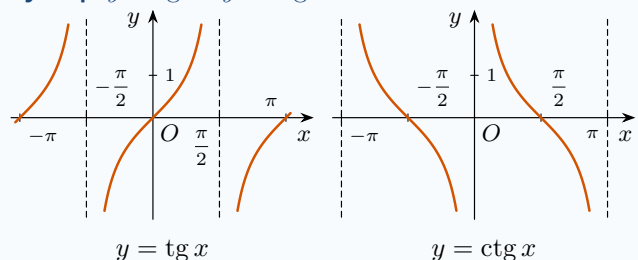
Функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$



	$y = \sin x$	$y = \cos x$
$D(y)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$E(y)$	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
Період	2π	2π
Парність	непарна	парна
Нулі	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$
$y > 0$	$(2\pi n; \pi + 2\pi n)$	$(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$
$y < 0$	$(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$	$(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n)$
Зростає	$[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n]$	$[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$
Спадає	$[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n]$	$[2\pi n; \pi + 2\pi n]$
Найбільше	1 при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$	1 при $x = 2\pi n$
Найменше	-1 при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	-1 при $x = \pi + 2\pi n$

Графік $y = \cos x$ — синусоїда $y = \sin x$, перенесена на $\frac{\pi}{2}$ ліворуч: $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

Функції $y = \tan x$ і $y = \cot x$



	$y = \tan x$	$y = \cot x$
$D(y)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x \neq \pi n$
$E(y)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Період	π	π
Парність	непарна	непарна
Нулі	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$
$y > 0$	$(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$	$(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$
$y < 0$	$(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n)$	$(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n)$
Зростає	$(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$	—
Спадає	—	$(\pi n; \pi + \pi n)$

Найбільшого й найменшого значень не мають. Прямі $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ (для $\tan x$) і $x = \pi n$ (для $\cot x$) графік не перетинає: у цих точках функція не визначена.

Область значень і період

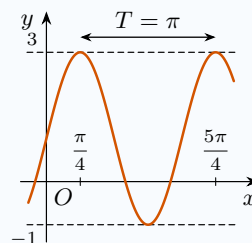
Для функцій

$$y = A \sin(kx + b) + m$$

$$y = A \cos(kx + b) + m \quad (A \neq 0, k \neq 0 \text{ — будь-які числа}):$$

$$E(y) = [m - |A|; m + |A|],$$

$$\text{головний період } T = \frac{2\pi}{|k|}.$$



(Бо $-1 \leq \sin t \leq 1$ і $-1 \leq \cos t \leq 1$.) На рисунку:

$$y = 2 \sin 2x + 1, \quad E(y) = [-1; 3], \quad T = \pi.$$

Перетворення графіків — у довіднику «Функції та графіки».

Для $y = \tan(kx + b)$ і $y = \cot(kx + b)$ ($k \neq 0$) головний період $T = \frac{\pi}{|k|}$.

Приклади: $1 - 4 \cos x$ набуває значень від -3 до 5 ; $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ — від $-\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{2}$; $a \sin x + b \cos x$ — від $-\sqrt{a^2 + b^2}$ до $\sqrt{a^2 + b^2}$ (допоміжний кут).
Заміна $t = \sin x$, $t \in [-1; 1]$: $\sin^2 x - \sin x = t^2 - t$ набуває значень від $-\frac{1}{4}$ (при $t = \frac{1}{2}$) до 2 (при $t = -1$).

3. Тригонометричні формули

10 кл.

Формули додавання

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

(якщо $\cos \alpha \neq 0$, $\cos \beta \neq 0$ і $\cos(\alpha \pm \beta) \neq 0$)

$$\text{Приклад: } \cos 70^\circ \cos 10^\circ + \sin 70^\circ \sin 10^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Допоміжний кут ($a^2 + b^2 \neq 0$):

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi), \text{ де}$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \text{ Приклад:}$$

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x + \frac{\pi}{3}).$$

Формули зведення

Для аргументів $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$:

1) у правій частині ставлять той знак, який мала б ліва частина при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (сама формула правильна для будь-якого α);

2) для $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ і $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ назву функції змінюють:

$$\sin \leftrightarrow \cos, \operatorname{tg} \leftrightarrow \operatorname{ctg}; \text{ для } \pi \pm \alpha \text{ назва не змінюється.}$$

Приклад: $\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\cos \alpha$ (кут $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ лежить у III чверті, там $\sin < 0$; назва змінюється).

З довідки НМТ (там кути записано в градусах):

$$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha \quad \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (\alpha \neq \frac{\pi k}{2})$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\text{Також } \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha, \quad \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Спершу відкидають цілі періоди: $\sin 930^\circ =$

$$\sin(2 \cdot 360^\circ + 210^\circ) = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}.$$

Подвійний і половинний аргумент

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \Delta \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad \Delta$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)$$

Пониження степеня:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Те саме: $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$, $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$.

Половинний аргумент (α замість 2α):

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}, \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}.$$

Потрійний аргумент: $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$,

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

$$\text{Приклади: } \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{4};$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Сума й різниця синусів і косинусів

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Добуток у суму:

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x - y) + \sin(x + y))$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y))$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

$$\text{Приклад: } \sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 2 \sin 45^\circ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

4. Рівняння і нерівності

10 кл.

Аркосинус, арксинус, арктангенс, аркотангенс

$\arccos b$ ($|b| \leq 1$) — число з проміжку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює b ;

$\arcsin b$ ($|b| \leq 1$) — число з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює b ;

$\operatorname{arctg} b$ — число з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює b ;

$\operatorname{arctg} b$ — число з проміжку $(0; \pi)$, котангенс якого дорівнює b .

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x,$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, \quad \operatorname{arctg}(-x) = \pi - \operatorname{arctg} x;$$

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad \cos(\arccos x) = x; \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x,$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = x;$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Формули з $\arcsin x$ і $\arccos x$ — лише для $|x| \leq 1$.

$$\text{Приклади: } \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}; \quad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3};$$

$$\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}; \quad \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}.$$

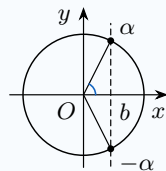
Хоча $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, але $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, бо $-\frac{\pi}{3} \notin [0; \pi]$.

Найпростіші тригонометричні рівняння

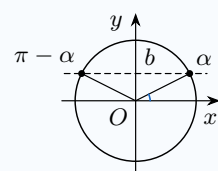
Рівняння	Корені
$\cos x = b, b \leq 1$	$x = \pm \arccos b + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = b, b \leq 1$	$x = (-1)^k \arcsin b + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = b$	$x = \operatorname{arctg} b + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = b$	$x = \operatorname{arctg} b + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Якщо $|b| > 1$, рівняння $\cos x = b$ і $\sin x = b$ коренів не мають. Інший запис коренів рівняння $\sin x = b$:

$$x = \arcsin b + 2\pi n \quad \text{або} \quad x = \pi - \arcsin b + 2\pi n.$$



$$\cos x = b, \quad \alpha = \arccos b$$



$$\sin x = b, \quad \alpha = \arcsin b$$

Окремі випадки (їх варто пам'ятати):

	$b = 1$	$b = 0$	$b = -1$
$\sin x = b$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$x = \pi n$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$
$\cos x = b$	$x = 2\pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = \pi + 2\pi n$

$$\text{Приклади: } \sin x = -\frac{1}{2};$$

$$x = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k;$$

$$\cos 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}: \quad 4x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad x = \pm \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}.$$

Методи розв'язування рівнянь

• Заміна змінної: за допомогою формул переходять до однієї функції одного аргументу

($\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ тощо).

Приклад: $2 \cos^2 x - \sin x - 1 = 0$;

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0; \quad t = \sin x, |t| \leq 1: \quad t = \frac{1}{2} \quad \text{або}$$

$$t = -1; \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k \quad \text{або} \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

• Однорідні рівняння: $a \sin x + b \cos x = 0$ ($a \neq 0$) — ділять на $\cos x$: $\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$;

$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ ($a \neq 0$) — ділять на $\cos^2 x$: $a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$.

Корені не губляться: якби $\cos x = 0$, то й $\sin x = 0$, а це неможливо.

$$\text{Приклад: } \sin x + \cos x = 0; \quad \operatorname{tg} x = -1; \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n.$$

• Розкладання на множники: добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один множник дорівнює нулю, а інші при цьому мають зміст. Приклад: $\sin 2x = \sin x$;

$$\sin x (2 \cos x - 1) = 0; \quad x = \pi n \quad \text{або} \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

• $a \sin x + b \cos x = c$ — через допоміжний кут:

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad \text{Приклад: } \sqrt{3} \cos x + \sin x = 2;$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1; \quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n.$$

• Обмеженість: оскільки $\sin x \leq 1$ і $\cos y \leq 1$, рівність

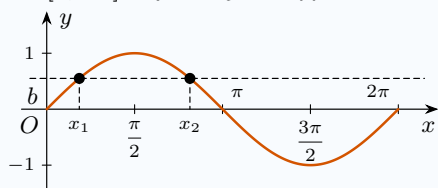
$$\sin x + \cos y = 2 \quad \text{можлива лише тоді, коли } \sin x = 1 \quad \text{і}$$

$$\cos y = 1.$$

• Якщо в рівнянні є tg , ctg або дріб, знайдені корені перевіряють (ОДЗ).

Корені на проміжку

Корені рівняння $f(x) = b$ — абсциси спільних точок графіка $y = f(x)$ і прямої $y = b$. На рисунку — $y = \sin x$ на $[0; 2\pi]$ і пряма $y = b$, де $0 < b < 1$.

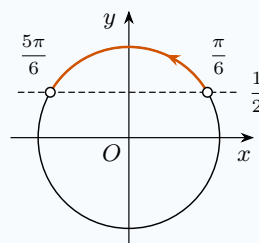


Рівняння $\sin x = b$ на $[0; 2\pi]$ має: 2 корені, якщо $-1 < b < 0$ або $0 < b < 1$; 3 корені, якщо $b = 0$ ($x = 0, \pi, 2\pi$); 1 корінь, якщо $b = \pm 1$; жодного, якщо $|b| > 1$.

Корені із загальної формули добирають, підставляючи $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$: $\cos x = \frac{1}{2}$ на $[0; 2\pi]$ — $x = \frac{\pi}{3}$ і $x = \frac{5\pi}{3}$ ($x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ при $n = 0$ і $n = 1$).

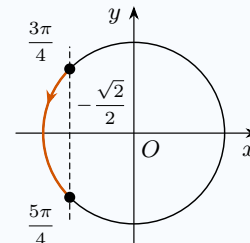
Тригонометричні нерівності

- 1) На одиничному колі позначають точки, у яких $\sin x = a$ (пряма $y = a$) або $\cos x = a$ (пряма $x = a$).
- 2) Виділяють дугу, на якій нерівність виконується, і записують кути її кінців, рухаючись проти годинникової стрілки: менший кут — на початку дуги.
- 3) Додають період: $2\pi n$. Кінці дуги входять у відповідь лише для нестрогої нерівності.



$$\sin x > \frac{1}{2}:$$

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$



$$\cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}:$$

$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$$

Для $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ розв'язують на проміжку завдовжки π за графіком і додають πn : $\operatorname{tg} x < 1$:

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n.$$