

Вирази, рівняння й нерівності

Довідник для підготовки до НМТ з математики



Д — формула є в довідкових матеріалах, які можна відкрити під час НМТ. Формули без значка треба пам'ятати.

Позначення (як у підручнику): $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ — множини натуральних, цілих, раціональних і дійсних чисел; $\cap$ — переріз, $\cup$ — об'єднання проміжків; D — дискримінант; x_1 , x_2 — корені.

Підручник — клас і пункт підручника А. Г. Мерзляка та ін. (алгебра: 7 кл. — 2024, 8 кл. — 2021, 9 кл. — 2017; модуль числа — математика, 6 кл., 2023). **НМТ** — номери завдань НМТ, де ця тема траплялася у 2024–2026 рр.: № 4 — лінійні нерівності та їхні системи, модуль, степені; № 9 — вирази (корені, степені, дробі, скорочене множення); № 13–15 — перетворення виразів, системи рівнянь; № 17 — значення виразів.

1. Степені й многочлени

7–8 кл.

Степень з натуральним показником

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2 \quad \text{Д} \quad a^1 = a \quad \text{Д}$$

a — основа, n — показник степеня. Від'ємне число в парному степені — додатне, у непарному — від'ємне; $0^n = 0$.

Для натуральних m і n :

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \text{Д} \quad (a^m)^n = a^{mn} \quad \text{Д}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad \text{Д} \quad (a \neq 0, m > n)$$

$$(ab)^n = a^n b^n \quad \text{Д}$$

$$\text{Приклад: } \frac{2^7 \cdot 4^3}{8^4} = \frac{2^7 \cdot 2^6}{2^{12}} = 2^{7+6-12} = 2;$$
$$(-a^4)^3 = -a^{12}.$$

Підручник 7 кл., п. 5, 6

НМТ № 4, 9, 17

Степень із цілим показником. Стандартний вигляд числа

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0 \quad \text{Д} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{Д}$$

Вираз 0^n при цілих $n \leq 0$ не має змісту.

Для $a \neq 0$, $b \neq 0$ і будь-яких цілих m , n справджуються всі властивості степеня з натуральним показником (уже без умови $m > n$), а також $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ **Д**; звідси $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

$$\text{Приклад: } (5^{-5})^{-4} : (5^{-7})^{-3} = 5^{20} : 5^{21} = 5^{-1} = \frac{1}{5}.$$

Стандартний вигляд числа: $a \cdot 10^n$, де $1 \leq a < 10$, n — ціле число (порядок числа):

$$564\,000\,000 = 5,64 \cdot 10^8; \quad 0,0036 = 3,6 \cdot 10^{-3};$$

$$(3,4 \cdot 10^{14}) \cdot (7 \cdot 10^{-8}) = 23,8 \cdot 10^6 = 2,38 \cdot 10^7.$$

Підручник 8 кл., п. 8, 9

НМТ № 4, 9, 17

Одночлени й многочлени. Тотожності

Одночлен — добуток чисел, змінних та їхніх степенів. Стандартний вигляд: один числовий множник (коефіцієнт) на першому місці, решта — степені різних змінних: $-3a^2b^5$ (коефіцієнт -3 , степінь $2 + 5 = 7$).

Многочлен — сума одночленів; подібні члени зводять: $5x^2y - 2x^2y = 3x^2y$. Степінь многочлена стандартного вигляду — найбільший зі степенів його членів.

$$a(b+c) = ab+ac, \quad (a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

Тотожність — рівність, правильна при всіх допустимих значеннях змінних; тотожне перетворення — заміна виразу тотожно рівним. Щоб довести тотожність, перетворюють одну її частину в другу, або обидві частини — в один вираз, або показують, що різниця частин тотожно дорівнює нулю.

Підручник 7 кл., п. 4, 7–11; 8 кл., п. 2

НМТ № 13–15

Формули скороченого множення

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \quad \text{Д}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{Д}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{Д}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Виділення квадрата двочлена:

$$x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 \geq 1, \quad \text{тому найменше значення виразу дорівнює 1 (при } x = 2\text{)}.$$

Підручник 7 кл., п. 14–18

НМТ № 9, 13–15

Розкладання многочлена на множники

Винесення спільного множника за дужки:

$$6x^3 - 9x^2 = 3x^2(2x - 3).$$

Групування:

$$ab + 2a + 3b + 6 = a(b+2) + 3(b+2) = (b+2)(a+3).$$

За формулами скороченого множення:

$$9x^2 - 25 = (3x-5)(3x+5); \quad x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2;$$

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4).$$

Способи часто поєднують:

$$2x^3 - 8x = 2x(x^2 - 4) = 2x(x-2)(x+2).$$

Підручник 7 кл., п. 12, 13, 15, 17–19

НМТ № 9, 13–15

2. Раціональні дроби

8 кл.

Раціональні дроби

Раціональний дріб $\frac{A}{B}$: чисельник A і знаменник B — многочлени, B — ненульовий. Допустимі значення змінних — ті, при яких вираз має зміст (знаменники не дорівнюють нулю); усі разом вони утворюють область допустимих значень (ОДЗ). Приклад: для виразу $\frac{1}{x} + \frac{3}{x-5}$ допустимі всі x , крім 0 і 5.

Основна властивість дробу (C — ненульовий многочлен):

$$\frac{A}{B} = \frac{AC}{BC} \quad - \frac{A}{B} = \frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}$$

Скорочення: $\frac{y^2 + 4y + 4}{y^2 + 2y} = \frac{(y+2)^2}{y(y+2)} = \frac{y+2}{y}$.

Дії з дробами (знаменники й дільник — ненульові):

$$\frac{A}{C} \pm \frac{B}{C} = \frac{A \pm B}{C} \quad \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{AD}{BC} \quad \left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{Д}$$

Дроб з різними знаменниками спочатку зводять до спільного знаменника:

$$\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b} = \frac{(a+b) - (a-b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{2b}{a^2 - b^2}$$

Підручник 8 кл., п. 1–6

НМТ № 9, 13–15

3. Квадратні корені. Дійсні числа

8 кл.

Арифметичний квадратний корінь

$\sqrt{a}$ — невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a :
 $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b \geq 0 \text{ і } b^2 = a$. Вираз $\sqrt{a}$ має зміст лише при $a \geq 0$.

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad (a \geq 0) \quad \sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0, b > 0)$$

Узагалі, $\sqrt{a^{2n}} = |a^n|$ ($n \in \mathbb{N}$): $\sqrt{a^{14}} = |a^7|$.

Якщо $a_1 > a_2 \geq 0$, то $\sqrt{a_1} > \sqrt{a_2}$:

$$2\sqrt{3} = \sqrt{12} < \sqrt{18} = 3\sqrt{2}; \quad 4 < \sqrt{20} < 5, \text{ бо } 16 < 20 < 25.$$

Рівняння $x^2 = a$: при $a > 0$ корені $\pm\sqrt{a}$; при $a = 0$ корінь 0; при $a < 0$ коренів немає.

Приклади: $\sqrt{(-7,3)^2} = 7,3$;

$$\sqrt{37^2 - 12^2} = \sqrt{25 \cdot 49} = 35.$$

Таблиця квадратів чисел від 10 до 49 є в довідці НМТ Д; з нею зручно добувати корені: $\sqrt{1369} = 37$.

Ірраціональні числа — нескінченні неперіодичні десяткові дробы ($\sqrt{2}$, π). Раціональні й ірраціональні числа разом утворюють множину дійсних чисел: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Якщо натуральне n не є квадратом натурального числа, то $\sqrt{n}$ — ірраціональне.

Підручник 8 кл., п. 12, 14, 15

НМТ № 9, 17

Перетворення виразів із квадратними коренями

Винесення множника з-під знака кореня:

$$\sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b} \quad (b \geq 0): \quad \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}.$$

Внесення множника під знак кореня: $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$

при $a \geq 0$; $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b}$ при $a < 0$: $-2\sqrt{7} = -\sqrt{28}$.

Для $a \geq 0, b \geq 0$: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$;

$$(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 = a \pm 2\sqrt{ab} + b.$$

Подібні доданки: $\sqrt{54} - \sqrt{24} = 3\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = \sqrt{6}$.

Звільнення від ірраціональності в знаменнику — множимо чисельник і знаменник на корінь або на вираз, що дає в знаменнику різницю квадратів:

$$\frac{15}{2\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{5\sqrt{3}}{2};$$

$$\frac{14}{5\sqrt{2} - 1} = \frac{14(5\sqrt{2} + 1)}{(5\sqrt{2})^2 - 1^2} = \frac{14(5\sqrt{2} + 1)}{49} = \frac{2(5\sqrt{2} + 1)}{7}$$

Підручник 8 кл., п. 16

НМТ № 9, 13–15, 17

4. Рівняння з однією змінною

7–8 кл.

Лінійне рівняння. Рівносильні рівняння

Лінійне рівняння $ax = b$ (x — змінна, a і b — числа):

$a \neq 0$	$a = 0, b = 0$	$a = 0, b \neq 0$
$x = \frac{b}{a}$	x — будь-яке число	коренів немає

Рівносильні рівняння мають ті самі корені (або обидва не мають коренів). Рівняння, рівносильне даному, отримаємо, якщо перенесемо доданок в іншу частину, змінивши його знак, або помножимо (поділимо) обидві частини на число, відмінне від нуля.

Добуток дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли хоча б один із множників дорівнює нулю, а інші мають зміст: $x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ або $x = \pm 2$.

Підручник 7 кл., п. 2; 8 кл., п. 7

Квадратне рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \quad \text{Д} \quad D = b^2 - 4ac \quad \text{Д}$$

$$D > 0: \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{Д}$$

$$D = 0: \quad x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \quad \text{Д} \quad (\text{один корінь})$$

$D < 0$: коренів немає.

Приклад: $2x^2 - x - 1 = 0$: $D = 1 + 8 = 9$,

$$x_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1+3}{4} = 1.$$

Зведене рівняння — з першим коефіцієнтом 1:

$$x^2 + bx + c = 0.$$

Неповні рівняння:

$$b = c = 0: \quad ax^2 = 0, \quad x = 0;$$

$$b \neq 0, c = 0: \quad x(ax + b) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a};$$

$$b = 0, c \neq 0: \quad x^2 = -\frac{c}{a}: \quad \text{якщо } -\frac{c}{a} > 0, \text{ то } x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}};$$

якщо $-\frac{c}{a} < 0$, коренів немає.

$$\text{Якщо } b = 2k \text{ і } k^2 - ac \geq 0, \text{ то } x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Підручник 8 кл., п. 18, 19

Теорема Вієта. Квадратний тричлен

Якщо x_1 і x_2 — корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} \quad (a \neq 0, D \geq 0)$$

Для зведеного рівняння $x^2 + bx + c = 0$:

$$x_1 + x_2 = -b, \quad x_1 x_2 = c.$$

Обернена теорема: якщо числа α і β такі, що

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \text{ і } \alpha\beta = \frac{c}{a}, \text{ то вони є коренями рівняння}$$

$$ax^2 + bx + c = 0. \text{ Приклад: } x^2 - 5x + 6 = 0: x_1 = 2, x_2 = 3 \quad (2 + 3 = 5, 2 \cdot 3 = 6).$$

Розклад квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ на множники (x_1, x_2 — його корені):

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{Д}$$

Якщо $D = 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$; якщо $D < 0$, тричлен не можна розкласти на лінійні множники.

Приклад:

$$2x^2 - x - 1 = 2(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x - 1)(2x + 1).$$

Підручник 8 кл., п. 20, 21

НМТ № 9, 13–15

Раціональні рівняння

Ліва й права частини рівняння — раціональні вирази. Дріб дорівнює нулю, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник — ні:

$$\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B \neq 0. \end{cases}$$

Алгоритм: 1) перенести все в ліву частину й звести

її до дробу $\frac{A}{B}$; 2) розв'язати рівняння $A = 0$; 3)

відкинути корені, при яких $B = 0$.

Приклад: $\frac{x^2 - 16}{x - 4} = 0: x^2 = 16, x = \pm 4$; але $x \neq 4$, тому $x = -4$.

Однакові знаменники: $\frac{A}{C} = \frac{B}{C} \Leftrightarrow A = B \text{ і } C \neq 0$.

Приклад: $\frac{x^2 + 2x}{x - 6} = \frac{5x + 18}{x - 6}: x^2 - 3x - 18 = 0$, $x = -3$ або $x = 6$; але $x \neq 6$, тому $x = -3$.

Підручник 8 кл., п. 7, 22

Рівняння, які зводяться до квадратних

Біквадратне рівняння $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a \neq 0$):

заміна $x^2 = t$ дає $at^2 + bt + c = 0$; $x^2 = t$ має корені лише при $t \geq 0$.

Приклад: $x^4 - 13x^2 + 36 = 0: t^2 - 13t + 36 = 0, t = 4$ або $t = 9$; $x = \pm 2, x = \pm 3$.

Метод заміни змінної — не лише для біквадратних рівнянь: у рівнянні $(2x - 1)^4 + (2x - 1)^2 - 2 = 0$ заміна $(2x - 1)^2 = t$ дає $t^2 + t - 2 = 0, t = -2$ або $t = 1$; $(2x - 1)^2 = -2$ коренів не має, з $(2x - 1)^2 = 1$ маємо $x = 0$ або $x = 1$.

Підручник 8 кл., п. 22

5. Нерівності

9 кл.

Числові нерівності

$a > b$, якщо $a - b > 0$; $a < b$, якщо $a - b < 0$.

Якщо $a > b$ і $b > c$, то $a > c$.

Якщо $a > b$, то $a + c > b + c$ для будь-якого числа c .

Якщо $a > b$ і $c > 0$, то $ac > bc$; якщо $a > b$ і $c < 0$, то $ac < bc$ (знак нерівності змінюється).

Якщо $a > b$ і $ab > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Почленне додавання: якщо $a > b$ і $c > d$, то

$$a + c > b + d.$$

Почленне множення: якщо $a > b > 0$ і $c > d > 0$, то

$$ac > bd; \text{ звідси } a^n > b^n \text{ при } a > b > 0, n \in \mathbb{N}.$$

Оцінювання: якщо $6 < a < 8$ і $10 < b < 12$, то

$$16 < a + b < 20, \quad 60 < ab < 96, \quad -6 < a - b < -2 \quad (60 - 12 < -b < -10).$$

Підручник 9 кл., п. 1–3

НМТ № 4

Лінійні нерівності

Нерівність, рівносильну даній, отримаємо, якщо:

перенесемо доданок з однієї частини в другу, змінивши його знак; помножимо (поділимо) обидві частини на додатне число; помножимо (поділимо) обидві частини на від'ємне число, змінивши знак нерівності на протилежний.

Лінійна нерівність $ax > b$ (так само $ax < b, ax \geq b, ax \leq b$):

$$a > 0: x > \frac{b}{a}; \quad a < 0: x < \frac{b}{a}; \quad a = 0:$$

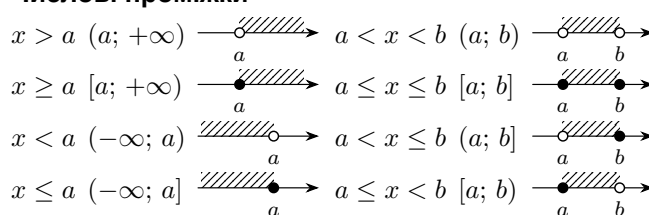
отримуємо числову нерівність ($0 > b, 0 < b, 0 \geq b$ чи $0 \leq b$): якщо вона правильна, x — будь-яке число; якщо ні — розв'язків немає.

Приклад: $4 - 6x > 3x + 13 \Leftrightarrow -9x > 9 \Leftrightarrow x < -1$, тобто $x \in (-\infty; -1)$.

Підручник 9 кл., п. 4, 5

НМТ № 4

Числові проміжки



Кругла дужка — кінець не входить (порожня точка), квадратна — входить (зафарбована). Усі числа — $(-\infty; +\infty)$. Біля $\pm\infty$ дужка завжди кругла.

Підручник 9 кл., п. 5, 6

НМТ № 4

Системи лінійних нерівностей

Розв'язок системи — значення змінної, яке задовольняє кожну нерівність. Множина розв'язків системи — переріз ($\cap$) множин розв'язків її нерівностей.

Приклад: $\begin{cases} 3x - 1 > -7, \\ 3 - 4x > -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < 3, \text{ тобто } (-2; 3):$



Подвійна нерівність — теж система:

$$-1 \leq 2x + 3 < 5 \Leftrightarrow -4 \leq 2x < 2 \Leftrightarrow -2 \leq x < 1.$$

Якщо спільних точок немає, розв'язків немає ($\emptyset$), наприклад: $x > 5$ і $x < 5$.

Допустимі значення виразу $\sqrt{2x-1} + \sqrt{5-x}$ — розв'язки системи $2x-1 \geq 0$, $5-x \geq 0$, тобто $[\frac{1}{2}; 5]$.

Підручник 9 кл., п. 6

НМТ № 4

Квадратні нерівності

$ax^2 + bx + c > 0$ (або $< 0, \geq 0, \leq 0$), $a \neq 0$. Графічний метод: знаходимо корені тричлена й схематично зображаємо параболу $y = ax^2 + bx + c$; при $a > 0$ її вітки напрямлені вгору. Розв'язки при $a > 0$:

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
> 0	$x < x_1$ або $x > x_2$	$x \neq x_0$	будь-яке x
≥ 0	$x \leq x_1$ або $x \geq x_2$	будь-яке x	будь-яке x
< 0	$x_1 < x < x_2$	$\emptyset$	$\emptyset$
≤ 0	$x_1 \leq x \leq x_2$	$x = x_0$	$\emptyset$

$x_0 = -\frac{b}{2a}$ [Д]; $\emptyset$ — розв'язків немає. Якщо $a < 0$, множимо нерівність на -1 , змінюючи її знак.

Приклад: $2x^2 - x - 1 > 0$: $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$;

$x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (1; +\infty)$.

Інші раціональні нерівності — методом інтервалів (довідник «Рівняння й нерівності: методи, модуль, параметр»).

Підручник 9 кл., п. 12

Рівняння й нерівності з модулем

$|a| = a$, якщо $a \geq 0$; $|a| = -a$, якщо $a < 0$ [Д]

$|a| \geq 0$, $|-a| = |a|$; $|a|$ — відстань від початку відліку до точки, яка зображує число a .

$|x| = a$: при $a > 0$ корені $\pm a$; при $a = 0$ корінь 0 ; при $a < 0$ коренів немає.

Так само: $|5x - 6| = 4 \Leftrightarrow 5x - 6 = 4$ або

$5x - 6 = -4$; $x = 2$ або $x = 0,4$.

Якщо знак виразу відомий, модуль розкриваємо за означенням: $|x - 3| = -(x - 3) = 3 - x$ при $x < 3$.

При $a > 0$: $|x| < a$

$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$;

$|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ або $x > a$. $|x| > a$

Приклад: $|2x + 3| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x + 3 < 5 \Leftrightarrow -4 < x < 1$.

Підручник 6 кл., п. 30; 7 кл., п. 2; 9 кл., п. 6

НМТ № 4, 17

6. Системи рівнянь. Текстові задачі

7–9 кл.

Системи лінійних рівнянь

Розв'язок системи з двома змінними — пара чисел $(x; y)$, яка перетворює кожне рівняння системи в правильну рівність.

Метод підстановки: з одного рівняння виражаємо змінну через другу ($3x - 2y = 6 \Rightarrow x = \frac{2y + 6}{3}$) й підставляємо в інше рівняння. Так само виражають змінну з формули: $S = \frac{(a+b)h}{2} \Rightarrow b = \frac{2S}{h} - a$.

Метод додавання: множимо рівняння на «вигідні» числа, щоб коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними, і додаємо рівняння почленно.

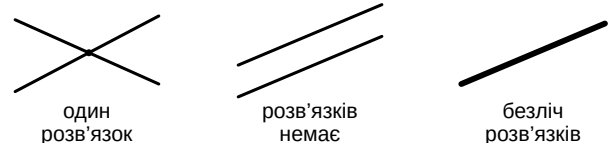
Приклад: $\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1 \end{cases}$ додаємо: $2x = 6$, $x = 3$,
 $y = 5 - 3 = 2$; розв'язок $(3; 2)$.

Підручник 7 кл., п. 24–28

НМТ № 13–15

Графічний метод. Кількість розв'язків

Розв'язки системи — координати спільних точок графіків її рівнянь. Графічно їх зазвичай знаходять наближено, тому перевіряємо підстановкою. Графік рівняння $ax + by = c$, де a і b не дорівнюють нулю одночасно, — пряма. Система двох лінійних рівнянь:



Інших випадків немає: така система не може мати, наприклад, рівно два розв'язки.

Підручник 7 кл., п. 25, 26

НМТ № 13–15

Системи рівнянь другого степеня

Ті самі методи: підстановка (зручна, якщо одне з рівнянь лінійне), додавання, заміна змінних, графічний.

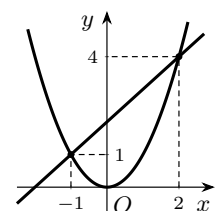
Приклад: $\begin{cases} y = x^2, \\ y - x = 2. \end{cases}$

Підстановка $y = x + 2$:

$x^2 = x + 2$, $x^2 - x - 2 = 0$,
 $x_1 = -1$, $x_2 = 2$; розв'язки
 $(-1; 1)$, $(2; 4)$.

Графічно — це спільні точки параболу $y = x^2$ і прямої

$y = x + 2$.



Підручник 9 кл., п. 13

НМТ № 13–15

Системи: заміна змінних, кількість розв'язків

Якщо відомі $x + y$ і xy , допомагає теорема, обернена до теореми Вієта: з $x + y = 3$, $xy = 2$ випливає, що x і y — корені рівняння $t^2 - 3t + 2 = 0$; розв'язки (1; 2), (2; 1).

Вираз, відомий з одного рівняння, підставляємо в інше: якщо $x + y = 5$, то $xy + y^2 = y(x + y) = 5y$.

Кількість розв'язків зручно визначати графічно: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ ($R > 0$) — коло з центром $(a; b)$ радіуса R ; $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) — парабола; $xy = k$ ($k \neq 0$) — гіпербола.

Підручник 9 кл., п. 13

НМТ № 13–15

Текстові задачі. Рух

Позначаємо невідоме, складаємо рівняння (систему), розв'язуємо й перевіряємо, чи відповідає корінь змісту задачі (швидкість, час, кількість — додатні).

Рух: $s = vt$, $t = \frac{s}{v}$. Рух назустріч (вирушили одночасно): до зустрічі тіла разом проходять усю відстань: $v_1t + v_2t = s$.

Рух по річці (v — власна швидкість, $v_{\text{т}}$ — швидкість течії): за течією $v + v_{\text{т}}$, проти течії $v - v_{\text{т}}$; пліт пливе зі швидкістю течії.

Приклад: човен пройшов 3 км за течією й 2 км проти течії за 0,5 год, швидкість течії — 2 км/год; x км/год — власна швидкість човна:

$$\frac{3}{x + 2} + \frac{2}{x - 2} = \frac{1}{2}$$

Звідси $x^2 - 10x = 0$: $x = 0$ — не підходить ($x > 2$), $x = 10$.

Підручник 7 кл., п. 3, 29; 8 кл., п. 7, 23; 9 кл., п. 14

Текстові задачі. Робота, числа

Спільна робота: усю роботу беремо за 1. Якщо перший виконує роботу за x год, а другий — за y год, то за 1 год вони виконують $\frac{1}{x}$ і $\frac{1}{y}$ роботи, а

$$\text{удвох} — \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Приклад: двоє робітників, працюючи разом, виконують роботу за 10 днів; x і y — кількість днів, за яку кожен виконав би її сам: $\frac{10}{x} + \frac{10}{y} = 1$.

Двоцифрове число $\overline{ab} = 10a + b$; з переставленими цифрами — $10b + a$.

Підручник 7 кл., п. 9, 29; 8 кл., п. 23; 9 кл., п. 14